

## Bac Terminale maths - Métropole 2026 - J2

### Exercice 1

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  pour vérifier si les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -2 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ -1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont manifestement pas proportionnelles (par exemple, la troisième coordonnée est  $-1$  pour l'un et  $0$  pour l'autre, tandis que la première est non nulle pour les deux). Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires, donc les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ne sont pas alignés. Ils définissent ainsi un unique plan  $(ABC)$ .

2. a. Pour montrer que le vecteur  $\vec{n}(1; -1; 4)$  est normal au plan  $(ABC)$ , vérifions qu'il est orthogonal aux deux vecteurs directeurs non colinéaires  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(ABC)$ , il est donc normal au plan  $(ABC)$ .

b. Le vecteur  $\vec{n}$  étant normal au plan  $(ABC)$ , ce dernier admet une équation cartésienne de la forme  $x - y + 4z + d = 0$ . Déterminons  $d$  en utilisant le point  $A(2; 1; 1)$  :

$$2 - 1 + 4(1) + d = 0 \iff 5 + d = 0 \iff d = -5$$

Une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est donc  $x - y + 4z - 5 = 0$ .

3. La droite  $\Delta$  passe par  $D(0; 0; 2)$  et est orthogonale au plan  $(ABC)$ . Elle admet donc pour vecteur directeur le vecteur normal  $\vec{n}(1; -1; 4)$ . Une représentation paramétrique de  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

4. Le projeté orthogonal  $H$  du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$  est le point d'intersection de la droite  $\Delta$  avec le plan  $(ABC)$ . Remplaçons les coordonnées de la droite dans l'équation cartésienne du plan :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \iff 2t + 8 + 16t - 5 = 0 \iff 18t + 3 = 0 \iff t = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

En remplaçant la valeur de  $t$  dans le système paramétrique, on obtient les coordonnées de  $H$  :

$$x_H = -\frac{1}{6}, \quad y_H = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}, \quad z_H = 2 + 4\left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$$

Le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$  est donc bien le point  $H\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$ .

5. a. Calculons les distances  $BA$  et  $BC$  :

$$BA = \sqrt{(2-3)^2 + (1-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (-1-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

Puisque  $BA = BC$ , le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ .

b. Soit  $I$  le milieu de  $[AC]$ . Puisque le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ , la hauteur issue de  $B$  coupe le segment  $[AC]$  en son milieu  $I$ . Les coordonnées de  $I$  sont  $I\left(\frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = I(1; 0; 1)$ .

$$BI = \sqrt{(1-3)^2 + (0-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

L'aire du triangle  $ABC$  est donc :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \times BI}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}$$

6. a. La hauteur  $h$  du tétraèdre relative à la base  $ABC$  est la distance  $DH$ . Puisque  $H$  est le projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$  :

$$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Calculons maintenant le volume  $V$  du tétraèdre :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

b. Le volume  $V$  peut également s'exprimer en utilisant la base  $BCD$  et la hauteur relative associée  $d(A, (BCD)) = \sqrt{2}$  :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times d(A, (BCD)) \iff 1 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times \sqrt{2} \iff \mathcal{A}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

7. a. Les points  $A, B, C$  et  $D_k(0; 0; k)$  sont coplanaires si et seulement si  $D_k$  appartient au plan  $(ABC)$ . Injectons ses coordonnées dans l'équation de ce plan :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \iff k = \frac{5}{4}$$

Pour  $k = \frac{5}{4}$ , le point  $D_k$  appartient au plan  $(ABC)$ , son projeté orthogonal sur le plan  $(ABC)$  est donc lui-même :  $D_{\frac{5}{4}}(0; 0; \frac{5}{4})$ .

b. Pour que  $A$  soit le projeté orthogonal de  $D_k$  sur le plan  $(ABC)$ , il faut et il suffit que le vecteur  $\vec{D_k A}$  soit colinéaire au vecteur normal  $\vec{n}(1; -1; 4)$ . Or, on a :

$$\vec{D_k A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 - k \end{pmatrix}$$

Pour qu'il y ait colinéarité, il doit exister un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{D_k A} = \lambda \vec{n}$ , soit :

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ 1 = -\lambda \\ 1 - k = 4\lambda \end{cases}$$

Les deux premières équations mènent à une contradiction ( $2 = -1$ ). Ainsi, il n'existe aucune valeur de  $k$  telle que  $A$  soit le projeté orthogonal de  $D_k$  sur le plan  $(ABC)$ .

## Exercice 2

---

### Partie A : modèle discret

---

1. Calculons les premiers termes :

$$V_1 = 0,995 \times V_0 + 6 = 0,995 \times 0 + 6 = 6$$

$$V_2 = 0,995 \times V_1 + 6 = 0,995 \times 6 + 6 = 11,97$$

2. Complétons le programme Python :

```
v = 0
```

```
v = 0.995 * v + 6
```

3. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ , on a  $V_0 = 0$  et  $V_1 = 6$ . On a bien  $0 \leq 6 \leq 1200$ , la propriété est donc vraie au rang 0.

**Hérédité :** Supposons qu'au rang  $n \geq 0$ , on ait  $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ . Montrons que la relation est vraie au rang  $n + 1$ , soit  $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$  :

$$\begin{aligned} & V_n \leq V_{n+1} \leq 1200 \\ \iff & 0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 0,995 \times 1200 \\ \iff & 0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 1194 + 6 \\ \iff & V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200 \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ .

4. La suite  $(V_n)$  est croissante ( $V_n \leq V_{n+1}$ ) et majorée par 1200. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite réelle  $L$  qui vérifie :

$$L = 0,995L + 6 \iff 0,005L = 6 \iff L = \frac{6}{0,005} = 1200$$

La suite  $(V_n)$  converge vers 1200.

## Partie B : modèle continu

---

1. a. L'équation différentielle est de la forme  $y' = ay + b$  avec  $a = -0,005$  et  $b = 6$ . Ses solutions sur  $[0; +\infty[$  sont définies par :

$$y(t) = Ce^{-0,005t} - \frac{6}{-0,005} = Ce^{-0,005t} + 1200 \quad (C \in \mathbb{R})$$

b. Puisque le phénomène débute à  $t = 0$ , on a  $v(0) = 0$  :

$$Ce^0 + 1200 = 0 \iff C = -1200$$

Ainsi, pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$ .

c. Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,005t = -\infty$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,005t} = 0$ , d'où :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200$$

d. La fonction  $v$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et sa dérivée est :

$$v'(t) = -1200 \times (-0,005)e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}$$

Comme l'exponentielle est toujours strictement positive,  $v'(t) > 0$  sur  $[0; +\infty[$ . La fonction  $v$  est donc strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2. Un taux de substance supérieure à 5 % du volume du bassin correspond à un volume de polluant supérieur à :

$$30\,000 \times 0,05 = 1500 \text{ litres}$$

Or, la fonction  $v$  est strictement croissante et tend vers 1200 litres à l'infini. Le volume maximum de substance polluante présent dans le bassin ne dépassera jamais 1200 litres. Ainsi, le seuil de 1500 litres ne sera jamais atteint et le propriétaire n'aura pas à procéder à ce nettoyage.

3. Résolvons l'inéquation  $v(t) > 50$  :

$$1200(1 - e^{-0,005t}) > 50 \iff 1 - e^{-0,005t} > \frac{50}{1200} \iff e^{-0,005t} < 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24} \iff -0,005t < \ln$$

La valeur exacte de l'instant recherché est  $t = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right)$  heures. Numériquement :

$$t \approx 8,5158 \text{ heures}$$

Convertissons en heures et minutes :  $0,5158 \times 60 \approx 31$  minutes. L'instant recherché est donc d'environ 8 heures et 31 minutes.

## Exercice 3

---

### 1. Affirmation 1 : VRAIE.

On cherche à déterminer  $P_F(O)$ . Les données sont :  $P(O) = 0,52$ ,  $P_O(F) = 0,32$  et  $P(F) = 0,20$ .  
Calculons d'abord l'intersection :

$$P(O \cap F) = P(O) \times P_O(F) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664$$

En appliquant la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{0,1664}{0,20} = 0,832$$

### 2. Affirmation 2 : FAUSSE.

La variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(5000; 0,062)$ . Son espérance vaut :

$$E(X) = n \times p = 5000 \times 0,062 = 310$$

Comme la loi binomiale peut ici être approchée par une loi normale symétrique par rapport à l'espérance 310, la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale à 340 (qui est supérieur à l'espérance 310) doit être strictement supérieure à 0,5. L'estimation à 0,4 est donc fautive (elle vaut en réalité environ 0,96).

### 3. Affirmation 3 : VRAIE.

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :  $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ .

Calculons la variance :

$$V(X) = np(1 - p) = 5000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78$$

L'événement « être strictement compris entre 230 et 390 » s'écrit  $|X - 310| < 80$ . Posons  $\delta = 80$  :

$$P(|X - 310| \geq 80) \leq \frac{290,78}{80^2} = \frac{290,78}{6400} \approx 0,0454$$

Par passage au complémentaire :

$$P(|X - 310| < 80) = 1 - P(|X - 310| \geq 80) \geq 1 - 0,0454 = 0,9546 > 0,95$$

Il y a bien plus de 95 % de chances.

### 4. Affirmation 4 : VRAIE.

Une équipe de 5 joueurs comporte 2 musiciens professionnels (choisis parmi 4) et 3 non-professionnels (choisis parmi les  $10 - 4 = 6$  restants). Le nombre d'équipes possibles est :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$$

## Exercice 4

---

### Partie A

---

1. a. La courbe admet au point  $C$  d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc  $f'(1) = 0$ .

b. La courbe coupe l'axe des abscisses au point  $A$  d'abscisse  $1/2$ , donc l'unique solution sur  $[0; 3]$  de  $f(x) = 0$  est  $x = \frac{1}{2}$ .

2. La tangente  $T_A$  au point  $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$  passe par  $B(1; e^2)$ . Son coefficient directeur, égal à  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ , est donné par :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{e^2}{\frac{1}{2}} = 2e^2$$

3. Les primitives de  $f$  ont pour dérivée  $f$ . Ainsi, le sens de variation d'une primitive de  $f$  est dicté par le signe de  $f(x)$ . D'après la courbe,  $f(x) \leq 0$  sur  $[0; 1/2]$  et  $f(x) \geq 0$  sur  $[1/2; +\infty[$ . Toute primitive de  $f$  doit donc être décroissante sur  $[0; 1/2]$  et croissante sur  $[1/2; +\infty[$ .

Sur le graphique, les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ont bien un minimum en  $x = 0,5$ , alors que  $\mathcal{C}_3$  présente un minimum en  $x = 1$ . Ainsi, les deux courbes représentant des primitives de  $f$  sont  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

## Partie B

---

1. a. Pour tout réel  $x \in [0; +\infty[$  :

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3} = (2x - 1)e^{-(2x-1)+2} = e^2 \times (2x - 1)e^{-(2x-1)} = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}}$$

b. Posons  $X = 2x - 1$ . Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow +\infty$ . Par croissances comparées :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^2 \times 0 = 0$$

2. a. En dérivant comme un produit de la forme  $uv$  avec  $u(x) = 2x - 1$  et  $v(x) = e^{-2x+3}$  :

$$f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}$$

b. L'exponentielle étant toujours strictement positive, le signe de  $f'(x)$  est celui de  $-4x + 4$ . Ce terme s'annule en  $x = 1$  et est strictement positif pour  $x < 1$ .

On calcule de plus  $f(0) = -e^3$  et  $f(1) = e$ . Nous pouvons dresser le tableau de variations :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-e^3$	$\nearrow$ e	$\searrow$

3. La contrainte imposée par le client correspond à la largeur de l'ouverture à l'extrémité droite du logo (en  $x = \alpha$ ). Par symétrie, cette largeur est égale à  $2 \times f(\alpha) = 0,3$  cm, ce qui équivaut à  $f(\alpha) = 0,15$ .

Sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante. On a  $f(1) = e \approx 2,72$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Comme  $0,15 \in ]0; e]$ , le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une unique valeur  $\alpha \in [1; +\infty[$  telle que  $f(\alpha) = 0,15$ .

À l'aide de la calculatrice, on trouve :  $f(3,2) \approx 0,18$ ,  $f(3,3) \approx 0,153$  et  $f(3,4) \approx 0,13$ . La valeur de  $\alpha$  arrondie au dixième est donc de 3,3.

## Partie C

---

1. Posons  $u(x) = 2x - 1 \implies u'(x) = 2$  et  $v'(x) = e^{-2x+3} \implies v(x) = -0,5e^{-2x+3}$ . En appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 I &= [-0,5(2x-1)e^{-2x+3}]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} -e^{-2x+3} dx \\
 &= [-0,5(2x-1)e^{-2x+3}]_{0,5}^{3,3} - [0,5e^{-2x+3}]_{0,5}^{3,3} \\
 &= [-xe^{-2x+3}]_{0,5}^{3,3} \\
 &= -3,3e^{-3,6} - (-0,5e^2) = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx 3,6
 \end{aligned}$$

L'intégrale  $I$  arrondie au dixième est bien égale à 3,6.

2. L'aire du logo correspond à la somme des surfaces délimitées par la courbe de  $f$  et son image symétrique par rapport à l'axe des abscisses sur  $[0,5; 3,3]$  :

$$\text{Aire du logo} = 2 \times I \approx 7,2 \text{ cm}^2$$

Le volume du porte-clé s'obtient en multipliant cette aire par l'épaisseur (0,2 cm) :

$$V = 7,2 \times 0,2 = 1,44 \approx 1,4 \text{ cm}^3$$

---

© L'Enseignant - Méthode 3P

**lenseignant.fr**