L'Enseignant
Cours particuliers en ligne

Correction - Mathématiques Terminale (Bac)

Bac Terminale maths - Métropole 2026 - sujet 1

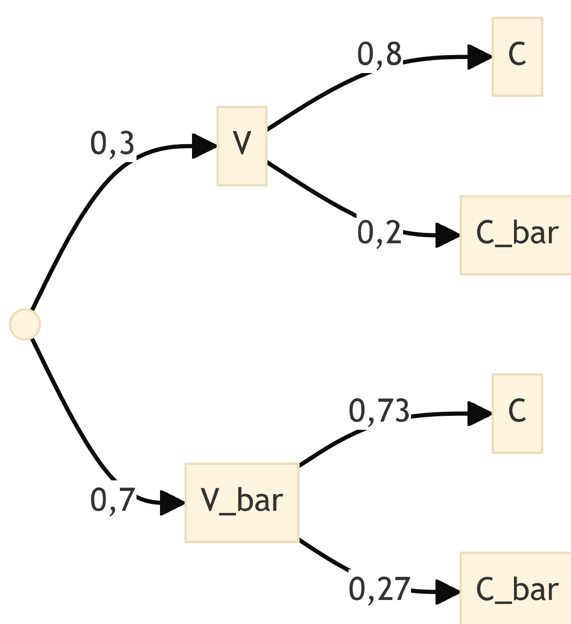
Exercice 1 - Partie A

1. a. D'après l'énoncé, 75 % des familles réservent une cabine, ce qui se traduit par :

$P(C) = 0,75$

1. b. En utilisant les données de l'énoncé, on sait que 30 % des familles réservent un véhicule, soit $P(V) = 0,3$, et que parmi elles, 80 % réservent une cabine, soit $P_V(C) = 0,8$. On en déduit l'arbre de probabilité complété :

Arbre de probabilités :



2. La probabilité de réserver un emplacement de véhicule et une cabine est :

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$$

3. On cherche la probabilité conditionnelle $P_C(V)$:

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{0,24}{0,75} = 0,32$$

4. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C)$$

On peut donc écrire :

$$0,75 = 0,24 + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(C) \iff 0,75 = 0,24 + 0,7 \times P_{\bar{V}}(C)$$

$$P_{\bar{V}}(C) = \frac{0,75 - 0,24}{0,7} = \frac{0,51}{0,7} \approx 0,73$$

Interprétation : Parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % d'entre elles décident de réserver une cabine.

Exercice 1 - Partie B

1. Calculons l'espérance de la variable aléatoire X :

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 4,2 + 51 + 40,8 = 96$$

Calculons maintenant sa variance $V(X)$:

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,19 + 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 = 294 + 5100 + 6936 = 12330$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 12330 - 96^2 = 12330 - 9216 = 3114$$

2. a. Une réduction de 40 % revient à appliquer un coefficient multiplicateur de $0,6$. On a donc :

$Z = 0,6(X + Y)$

2. b. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = 0,6(E(X) + E(Y)) = 0,6(96 + 104) = 0,6 \times 200 = 120$$

Comme X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. De plus, $V(aW) = a^2V(W)$, d'où :

$$V(Z) = 0,6^2 \times (V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3114 + 1686) = 0,36 \times 4800 = 1728$$

3. a. Par propriété de l'espérance et de la variance de la moyenne d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$E(M_n) = E(Z) = 120 \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{1728}{n}$$

3. b. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable M_n s'écrit :

$$P(|M_n - 120| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

On s'intéresse à l'événement $114 < M_n < 126$, ce qui équivaut à $|M_n - 120| < 6$. On pose $\varepsilon = 6$:

$$P(|M_n - 120| < 6) \geq 1 - \frac{1728}{36n} = 1 - \frac{48}{n}$$

On cherche le plus petit entier n tel que :

$$1 - \frac{48}{n} \geq 0,85 \iff \frac{48}{n} \leq 0,15 \iff n \geq \frac{48}{0,15} = 320$$

Le plus petit entier cherché est donc $n = 320$. Cela signifie que pour un échantillon d'au moins 320 familles, la probabilité que le prix moyen payé après réduction soit compris entre 114 euros et 126 euros est supérieure ou égale à 85 %.

Exercice 2

1. a. **Affirmation 1 : Vraie**

Le vecteur normal du plan (P) est $\vec{n}(-1; 1; -5)$. Le vecteur directeur $\vec{AB}$ a pour coordonnées :

$$\vec{AB}(2-3; 1-0; -3-2) \implies \vec{AB}(-1; 1; -5)$$

Comme $\vec{AB} = \vec{n}$, la droite (AB) est orthogonale au plan (P). De plus, le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{3+2}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{2-3}{2}\right) \implies I(2,5; 0,5; -0,5)$$

Vérifions si les coordonnées de I satisfont l'équation cartésienne de (P) :

$$-2,5 + 0,5 - 5(-0,5) - 0,5 = -2,5 + 0,5 + 2,5 - 0,5 = 0$$

Le point I appartient au plan (P), l'affirmation 1 est donc vraie.

1. b. **Affirmation 2 : Fausse**

La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; -1; -2)$. Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas proportionnelles, donc les droites ne sont pas parallèles. Testons si elles sont sécantes en résolvant le système d'équations paramétriques :

$$\begin{aligned} t &= 3 - k \\ -1,5 - t &= k \\ 2 - 2t &= 2 - 5k \end{aligned}$$

La somme des deux premières équations donne $-1,5 = 3$, ce qui est absurde. Les droites ne sont pas sécantes.

1. c. **Affirmation 3 : Vraie**

Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$:

$$\vec{CA}(1,5; 3; 3) \quad \text{et} \quad \vec{CB}(0,5; 4; -2)$$

Calculons leur produit scalaire et leurs normes :

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 6,75$$

$$CA = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = 4,5 \quad \text{et} \quad CB = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = 4,5$$

Le cosinus de l'angle vaut :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{CA \times CB} = \frac{6{,}75}{20{,}25} = \frac{1}{3}$$

On trouve ainsi $\widehat{ACB} \approx 70,5°$.

2. **Affirmation 4 : Vraie**
Clotilde doit trouver un code ordonné de 3 symboles distincts parmi 8, soit un nombre de possibilités égal à :

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

La probabilité que Clotilde trouve le code est de $P(A) = \frac{1}{336}$. Titouan doit saisir un code non ordonné de 4 symboles distincts parmi 8, soit un nombre de possibilités de :

$$\binom{8}{4} = 70$$

La probabilité que Titouan trouve le code est de $P(B) = \frac{1}{70}$. Comme $P(B) > P(A)$, Titouan a bien plus de chances d'ouvrir sa porte.

Exercice 3 - Partie A

1. L'équation différentielle (E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,035$ et $b = 0,91$. Les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ de la forme :

$$y(t) = Ce^{-0{,}035t} - \frac{0{,}91}{-0{,}035} = Ce^{-0{,}035t} + 26 \quad (C \in \mathbb{R})$$

2. D'après les conditions initiales, $T(0) = 18$:

$$Ce^0 + 26 = 18 \implies C = -8$$

On a donc, pour tout réel $t \geq 0$:

$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}$

3. Cherchons la valeur de t telle que $T(t) = 20$:

$26 - 8e^{-0,035t} = 20 \iff 8e^{-0,035t} = 6 \iff e^{-0,035t} = 0,75$

$-0,035t = \ln(0,75) \iff t = \frac{\ln(0,75)}{-0,035} \approx 8,224$

Comme t est exprimé en dizaines de minutes, le temps en minutes vaut $10 \times t \approx 82,24$ minutes, soit environ 1 heure et 22 minutes.

4. Comme $\lim_{t \to +\infty} e^{-0,035t} = 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} T(t) = 26$. Ainsi, d'après ce modèle, la température ne pourra jamais dépasser 26 °C, et donc elle ne pourra pas dépasser 28 °C.

Exercice 3 - Partie B

1. Calculons u_1 :

$u_1 = 0,965u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1\times 0} = 0,965(20) + 0,35 + 0,07 = 19,72$

2. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 10$:

Initialisation : Au rang 0, $u_0 = 20 > 10$, la propriété est donc vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geq 0$, on ait $u_n > 10$. Montrons que $u_{n+1} > 10$:

$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 10$, donc $0,965u_n > 9,65$. Comme l'exponentielle est toujours positive, on a $0,07e^{-0,1n} > 0$. D'où :

$u_{n+1} > 9,65 + 0,35 + 0 \implies u_{n+1} > 10$

L'hérédité est prouvée.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n > 10$.

3. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 10, elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

4. a. À la limite, l'égalité de récurrence donne l'équation, sachant que $\lim_{n \to +\infty} e^{-0,1n} = 0$:

$$\ell = 0,965\ell + 0,35$$

4. b. En résolvant l'équation :

$$0,035\ell = 0,35 \iff \ell = 10$$

La température de la pièce se rapproche de 10 °C à long terme si le chauffage reste éteint.

5. a. Les lignes complétées du programme Python sont les suivantes :

Ligne 4 : `while u > 18 :`

Ligne 5 : `u = 0.965 * u + 0.35 + 0.07 * exp(-0.1 * n)`

Ligne 6 : `n = n + 1`

5. b. En calculant les valeurs successives de la suite, on trouve que $u_7 \approx 18,10$ et $u_8 \approx 17,84$. Le système de chauffage se remettra donc en marche au bout de 8 dizaines de minutes (soit 80 minutes).

Exercice 4 - Partie A

1. Le point $A(0;1)$ appartient à la courbe, donc :

$f(0) = a + \frac{b\ln(1)}{1} = a = 1$

2. a. Graphiquement, la pente de la tangente T_A au point d'abscisse 0 est de 4 (elle passe par $(0;1)$ et $(1;5)$). On a donc :

$f'(0) = 4$

2. b. Au point d'abscisse 1, la courbe est concave (tangente au-dessus de la courbe), donc :

$f''(1) < 0$

3. a. En utilisant la formule de dérivation du quotient, on obtient :

$f'(x) = 0 + b\frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{b(1-\ln(x+1))}{(x+1)^2}$

3. b. On sait que $f'(0) = 4$, d'où :

$\frac{b(1-\ln(1))}{1^2} = 4 \implies b = 4$

Exercice 4 - Partie B

1. Par croissance comparée, $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$, d'où :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + 4\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est ainsi une asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

2. Résolvons l'inéquation :

$1 - \ln(x+1) > 0 \iff \ln(x+1) < 1 \iff x + 1 < e \iff x < e - 1$

Sur l'intervalle d'étude, l'ensemble des solutions est $]-1; e-1[$.

3. Dressons le tableau de variations complet de f :

x	-1	$e-1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$1+4/e$	$\searrow$

4. Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus, $f(2)=1+\frac{4\ln(3)}{3}\approx 2,46>1,5$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1<1,5$. Comme $1,5\in]1;f(2)]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1,5$ admet une unique solution. Par balayage, on trouve :

$$x\approx 25,1$$

5. a. L'expression sous l'intégrale est de la forme $u'u$ avec $u(x)=\ln(x+1)$ d'où une primitive de la forme $\frac{1}{2}u^2$:

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^2=\frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

5. b. La fonction f étant positive sur $[0;2]$, l'aire délimitée est donnée par l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 1dx+4\int_0^2\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=[x]_0^2+4\times\left(\frac{1}{2}(\ln 3)^2\right)=2+2(\ln 3)^2$$

L'aire recherchée est donc égale à $2+2(\ln 3)^2$ unités d'aire.