L'Enseignant
Cours particuliers en ligne

Correction - Mathématiques Terminale (Bac)

Bac maths Term SPE - Centres Etrangers 2026

Exercice 1

Question 1

D'après l'énoncé, au premier tir, le tireur atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. On a donc $p_1 = P(T_1) = \frac{1}{2}$.

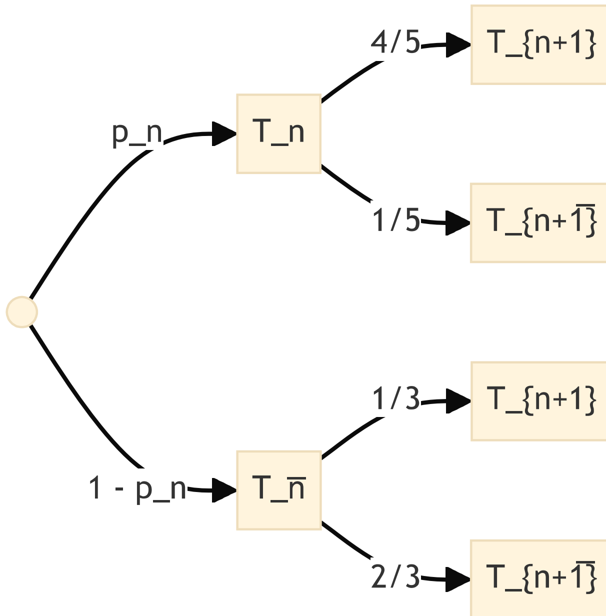
Pour calculer $p_2 = P(T_2)$, on utilise la formule des probabilités totales :

$$P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2) = P(T_1)P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1})P_{\overline{T_1}}(T_2)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{12}{30} + \frac{5}{30} = \frac{17}{30}$$

Question 2

Arbre de probabilités :



Question 3

La famille d'évènements $\{T_n, \overline{T_n}\}$ forme une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\ &= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1}) \\ &= P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n})P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n \\ &= \left(\frac{12}{15} - \frac{5}{15}\right)p_n + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Question 4.a

Pour tout entier naturel n non nul, exprimons u_{n+1} en fonction de u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{5}{8} \\ &= \left(\frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{8} \\ &= \frac{7}{15}p_n + \frac{8-15}{24} \\ &= \frac{7}{15}p_n - \frac{7}{24} \\ &= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{7}{24} \times \frac{15}{7}\right) \\ &= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{15}{24}\right) \\ &= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right) \\ &= \frac{7}{15}u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{7}{15}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$.

Question 4.b

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$$

Question 4.c

Comme $u_n = p_n - \frac{5}{8}$, on a $p_n = u_n + \frac{5}{8}$. Ainsi :

$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$

Question 5

Puisque $-1 < \frac{7}{15} < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} = 0$.

Par opérations sur les limites, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{5}{8}$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que si le tireur s'entraîne un très grand nombre de fois, la probabilité d'atteindre le centre de la cible se stabilisera à $\frac{5}{8}$.

Question 6

Voici les complétions de la fonction Python :

Boucle while : p < 0.6

Indentation 1 : n = n + 1

Indentation 2 : p = 7/15 * p + 1/3

Retour : return n

Question 7

Résolvons l'inéquation $p_n \geq 0,6$:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} &\geq 0,6 \\ 0,625 - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} &\geq 0,6 \\ 0,025 &\geq \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \\ 0,2 &\geq \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \\ \ln(0,2) &\geq \ln\left(\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}\right) \\ \ln(0,2) &\geq (n-1)\ln\left(\frac{7}{15}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0$, le sens de l'inégalité s'inverse en divisant par ce terme :

$$\begin{aligned} n-1 &\geq \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \\ n &\geq 1 + \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \end{aligned}$$

Or $1 + \frac{\ln(0,2)}{\ln(7/15)} \approx 3,11$. L'entier naturel n cherché doit donc être supérieur ou égal à 4. La solution de l'inéquation est l'ensemble des entiers $n \geq 4$.

Exercice 2

Affirmation 1

L'affirmation 1 est vraie. Pour $x \in]1;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$. Par composition avec la fonction racine carrée qui est continue en 1, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{1} = 1$.

Affirmation 2

L'affirmation 2 est vraie. Démontrons-le par récurrence. L'initialisation pour $n = 0$ donne $w_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$, l'égalité est vérifiée. Supposons que pour un certain entier naturel n, on ait $w_n = (n+1)^2$. Alors :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + 2n + 3 \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \\ &= ((n+1)+1)^2 \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, $w_n = (n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Affirmation 3

L'affirmation 3 est vraie. Puisque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p, on a :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{3}{1} p^1 (1-p)^{3-1} \\ &= 3p(1-p)^2 \\ &= 3p(1-2p+p^2) \\ &= 3p - 6p^2 + 3p^3 \end{aligned}$$

Affirmation 4

L'affirmation 4 est fausse. Calculons l'intégrale :

$v_n = \int_0^1 e^{nx}\,dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{1}{n}e^n - \frac{1}{n}e^0 = \frac{e^n-1}{n}$

Le résultat n'est pas égal à $\frac{e^n}{n}$.

Affirmation 5

L'affirmation 5 est fausse. Chaque case du quadrillage peut être coloriée de 3 façons différentes (rouge, jaune ou noir), indépendamment des autres. Comme il y a 16 cases, le nombre total de coloriages possibles est de 3^{16}. La valeur $\binom{16}{3}$ représente le nombre de façons de choisir 3 cases parmi 16, ce qui ne correspond pas au problème posé.

Exercice 3

Question 1.a

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-1\\-2-2\\2-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles (par exemple, $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-4}$). Les vecteurs ne sont donc pas colinéaires, et les points B, C et E ne sont pas alignés.

Question 1.b

Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$:

$$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3-0\\0-0\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$$

Calculons les produits scalaires $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}$:

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times 2+0\times 1+3\times(-2)=6-6=0$$
$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=3\times 1+0\times(-4)+3\times(-1)=3-3=0$$

Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (BCE), il est donc normal à ce plan.

Question 1.c

Comme $\overrightarrow{AF}(3;0;3)$ est un vecteur normal au plan (BCE), le vecteur $\vec{n}(1;0;1)$, qui lui est colinéaire (puisque $\overrightarrow{AF}=3\vec{n}$), est aussi un vecteur normal. Une équation cartésienne de (BCE) s'écrit :

$$1x+0y+1z+d=0 \iff x+z+d=0$$

Le point $B(1;2;3)$ appartient au plan (BCE), ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$$1+3+d=0 \iff d=-4$$

Une équation cartésienne du plan (BCE) est bien $x+z-4=0$.

Question 2.a

On remplace les coordonnées du point $G(5; 1; 2)$ dans l'équation du plan (BCE) :

$$x_G + z_G - 4 = 5 + 2 - 4 = 3 \neq 0$$

Le point G n'appartient donc pas au plan (BCE).

Question 2.b

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 5-0 \\ 1-0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ étaient coplanaires, il existerait des réels a et b tels que $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{BC}$. On aurait le système suivant :

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ -4a + b = 1 \\ -a - 2b = 1 \end{cases}$$

En additionnant la première et la troisième ligne, on obtient $0 = 6$, ce qui est absurde. Ce système n'ayant pas de solution, les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Question 2.c

Puisque $\overrightarrow{AG}$ n'est pas coplanaire avec les vecteurs directeurs du plan (BCE), la droite (AG) n'est pas parallèle à ce plan. Ainsi, la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Question 3.a

La droite (AG) passe par $A(0;0;1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(5;1;1)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = 0 + 1t \\ z = 1 + 1t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Question 3.b

Le point P, intersection de (AG) et (BCE), vérifie le système formé par leurs équations. On substitue x , y et z de (AG) dans l'équation de (BCE) :

$$5t + (1+t) - 4 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = \frac{1}{2}$$

En remplaçant t par $\frac{1}{2}$, on obtient $x_P = \frac{5}{2}$, $y_P = \frac{1}{2}$ et $z_P = \frac{3}{2}$. Les coordonnées de P sont $P\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Question 3.c

Calculons les coordonnées du milieu de $[EC]$:

$$\begin{cases} x = \frac{x_E + x_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ y = \frac{y_E + y_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \\ z = \frac{z_E + z_C}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ces coordonnées sont celles de P. Le point P est donc le milieu du segment $[EC]$.

Question 4

Déterminons l'intersection des plans (BCE) et (ACG) :

Le point C appartient de manière évidente aux deux plans.

La droite (AG) est incluse dans (ACG), donc le point $P \in (AG)$ appartient au plan (ACG).

Par construction, P appartient également au plan (BCE).

Les points distincts C et P appartiennent tous deux aux deux plans. Ces deux plans n'étant pas confondus, leur intersection est la droite (CP).

Exercice 4

Question 1.a

La fonction $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$ est dérivable sur $[0; 2\pi]$. On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x))) - \cos(x) \\ &= \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) \\ &= -x\sin(x) \end{aligned}$$

Question 1.b

Justifions les éléments du tableau de variations. Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, $x \geq 0$, donc le signe de $g'(x)$ est strictement l'opposé de celui de $\sin(x)$.

Sur $[0; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$, donc $g'(x) \leq 0$. La fonction g y est décroissante.

Sur $[\pi; 2\pi]$, $\sin(x) \leq 0$, donc $g'(x) \geq 0$. La fonction g y est croissante.

Les valeurs aux bornes et en π sont :

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0 \\ g(\pi) &= \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = -\pi \\ g(2\pi) &= 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi) = 2\pi \end{aligned}$$

Question 1.c

Sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$, la fonction g est continue et strictement croissante. De plus, $g(\pi) = -\pi < 0$ et $g(2\pi) = 2\pi > 0$. Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\pi; 2\pi]$.

Question 1.d

D'après les variations de g, la fonction s'annule en 0 puis reste strictement négative sur $]0; \alpha[$. Elle s'annule en α puis devient strictement positive sur $]\alpha; 2\pi]$. D'où le tableau de signes :

x	0		α		2π
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	

Question 2.a

La fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est dérivable sur $]0; 2\pi]$:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Question 2.b

Pour tout $x \in]0; 2\pi]$, $x^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc identique à celui de $g(x)$.

$f'(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$

$f'(\alpha) = 0$

$f'(x) > 0$ sur $]\alpha; 2\pi]$

Question 2.c

Par conséquent :

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \alpha]$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; 2\pi]$.

Question 2.d

On cherche $\lim_{x \to 0} f(x)$. En reconnaissant le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0 :

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

Question 3

On sait que $0 < r < s < \pi$. Puisque $\alpha \geq \pi$, on a $0 < r < s < \alpha$. Sur l'intervalle $]0; \alpha]$, f est strictement décroissante. L'inégalité $r < s$ implique donc $f(r) > f(s)$, ce qui s'écrit :

$\frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s}$

Comme $s \in]0; \pi[$, $\sin(s) > 0$. De même, $r > 0$. On peut alors multiplier les deux membres par la quantité strictement positive $\frac{r}{\sin(s)}$:

$\frac{\sin(r)}{r} \times \frac{r}{\sin(s)} > \frac{\sin(s)}{s} \times \frac{r}{\sin(s)} \iff \frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s} \iff \frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$

L'inégalité demandée est ainsi démontrée.

© L'Enseignant - Méthode 3P