

## Bac Term Spé Maths - 2026 - Asie J2

### Exercice 1

---

#### Partie A

---

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty; \frac{3}{2}[$  par  $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$ .

1. Justifions les éléments du tableau de variation de  $f$  :

La fonction  $f$  est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, notamment sur  $] -\infty; \frac{3}{2}[$ . Pour tout réel  $x$  de cet intervalle, on pose  $u(x) = x - 2$  et  $v(x) = 2x - 3$ , d'où  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = 2$ .

$$f'(x) = \frac{1(2x-3) - 2(x-2)}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}$$

Puisque  $(2x - 3)^2 > 0$  sur  $] -\infty; \frac{3}{2}[$ , on a  $f'(x) > 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur cet intervalle.

Déterminons les limites aux bornes de l'intervalle :

En  $-\infty$  : Comme  $f$  est une fonction rationnelle, sa limite en  $-\infty$  est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

En  $\frac{3}{2}^-$  : On a  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (x - 2) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (2x - 3) = 0^-$  (car  $2x < 3$ ). Par quotient de limites :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = +\infty$$

2. Dédisons-en que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $f(x) \in [0; 1]$  :

Puisque  $[0; 1] \subset ]-\infty; \frac{3}{2}[$  et que  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle, on a, pour tout  $x \in [0; 1]$  :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

Calculons les valeurs aux bornes :

$$f(0) = \frac{0-2}{2(0)-3} = \frac{2}{3}$$

$$f(1) = \frac{1-2}{2(1)-3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

On obtient ainsi  $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1$ . Comme  $[\frac{2}{3}; 1] \subset [0; 1]$ , on a bien  $f(x) \in [0; 1]$  pour tout  $x \in [0; 1]$ .

## Partie B

---

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n-2}{2u_n-3} = f(u_n)$ .

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , désignons par  $P(n)$  la propriété :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 0$  et  $u_1 = f(u_0) = \frac{2}{3}$ . On a bien  $0 \leq 0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$ , soit  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ . La propriété  $P(0)$  est donc vraie.

**Hérédité :** Supposons que pour un certain entier naturel  $n$ , la propriété  $P(n)$  soit vraie, c'est-à-dire que  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ . Appliquons la fonction  $f$ , qui est strictement croissante sur  $[0; 1]$  :

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$ . Sachant que  $f(0) = \frac{2}{3}$ ,  $f(u_n) = u_{n+1}$ ,  $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$  et  $f(1) = 1$ ,

on en déduit :  $\frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ . Comme  $\frac{2}{3} \geq 0$ , on a bien  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ . La propriété  $P(n+1)$  est donc vraie.

**Conclusion :** Par le principe de récurrence, on a démontré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .

2. Déduisons-en que la suite  $(u_n)$  converge :

D'après la question précédente, la suite  $(u_n)$  est croissante ( $u_n \leq u_{n+1}$  pour tout  $n$ ) et majorée par 1 ( $u_n \leq 1$  pour tout  $n$ ). En vertu du théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  converge vers une limite réelle  $l$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ .

3. Montrons que  $l = 1$  :

Comme la suite  $(u_n)$  converge vers  $l \in [0; 1]$  et que la fonction  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ , d'après le théorème du point fixe, la limite  $l$  est solution de l'équation  $f(l) = l$ .

$$\begin{aligned} f(l) = l &\iff \frac{l-2}{2l-3} = l \\ &\iff l-2 = l(2l-3) \\ &\iff l-2 = 2l^2-3l \\ &\iff 2l^2-4l+2 = 0 \\ &\iff 2(l-1)^2 = 0 \\ &\iff l = 1 \end{aligned}$$

L'unique solution de cette équation sur  $[0; 1]$  est 1. On en déduit donc que  $l = 1$ .

4. Interprétation de la valeur 5 000 renvoyée par l'appel `seuil(0.0001)` :

La boucle `while u < 1 - h` s'arrête dès que la valeur de  $u_n$  est supérieure ou égale à  $1 - h$ , c'est-à-dire à une distance inférieure ou égale à  $h$  de la limite 1. Ainsi, la valeur 5 000 indique que le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel le terme  $u_n$  se situe dans l'intervalle  $[1 - 0,0001; 1]$  (c'est-à-dire  $u_n \geq 0,9999$ ) est  $n = 5000$ .

5. a. Donnons les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$  sous forme de fractions irréductibles :

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = f(0) = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}-2}{2\left(\frac{2}{3}\right)-3} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

$$u_3 = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\frac{4}{5}-2}{2\left(\frac{4}{5}\right)-3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{6}{7}$$

b. Conjeturons l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et démontrons-la :

Au vu des premiers termes obtenus, on peut conjecturer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}$$

Démontrons cette conjecture par récurrence sur  $n$  :

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 0$  et  $\frac{2(0)}{2(0)+1} = 0$ . La propriété est donc vraie au rang 0.

**Hérédité :** Supposons que pour un entier naturel  $n$  quelconque, la propriété soit vraie, c'est-à-dire que  $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ . On a alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n-2}{2u_n-3} = \frac{\frac{2n}{2n+1}-2}{2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)-3} = \frac{\frac{2n-2(2n+1)}{2n+1}}{\frac{4n-3(2n+1)}{2n+1}} = \frac{2n-4n-2}{4n-6n-3} = \frac{-2n-2}{-2n-3} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}$$

La propriété est donc héréditaire. En conclusion, on a bien pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ .

## Exercice 2

---

### Partie A

---

1. Justifions que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale :

L'expérience consiste en la répétition de 16 lancers-francs qui sont identiques et indépendants. Chaque lancer présente deux issues possibles : le succès (le joueur réussit le lancer) avec une probabilité  $p = 0,492$  (soit 49,2 % de réussite), et l'échec (le joueur rate le lancer) de probabilité  $q = 1 - p = 0,508$ . La variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de lancers réussis suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 16$  et  $p = 0,492$ . On note  $X \sim \mathcal{B}(16; 0,492)$ .

2. Déterminons l'espérance de la variable aléatoire  $X$  et interprétons-la :

$$E(X) = n \times p = 16 \times 0,492 = 7,872$$

Interprétation : Sur un grand nombre de matchs de 16 lancers-francs, ce joueur peut espérer en réussir en moyenne environ 7,87.

3. Calculons  $P(X = 5)$  :

$$P(X = 5) = \binom{16}{5} \times (0,492)^5 \times (1 - 0,492)^{11} = 4368 \times (0,492)^5 \times (0,508)^{11} \approx 0,076$$

4. Calculons la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs :

On cherche à calculer  $P(X \geq 6)$ .

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$$

À l'aide d'une calculatrice, on obtient  $P(X \leq 5) \approx 0,119$ . On a donc :

$$P(X \geq 6) \approx 1 - 0,119 = 0,881$$

## Partie B

---

Le joueur effectue désormais 3 lancers-francs indépendants. La probabilité de réussite d'un lancer est  $p$  avec  $0 \leq p \leq 1$ .

1. Les valeurs prises par la variable aléatoire  $Y$  sont :  $Y \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

2. Exprimons  $P(Y = 2)$  en fonction de  $p$  :

La variable  $Y$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(3, p)$ . On a :

$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 = 3p^2(1-p) = -3p^3 + 3p^2$$

3. Établissons la loi de probabilité de  $Y$  :

$y$	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	$p^3$

4. Montrons que  $P(Y \geq 2) = -2p^3 + 3p^2$  :

$$P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 3p^3 + p^3 = -2p^3 + 3p^2$$

5. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ .

a. Étudions le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0; 1]$  :

La fonction  $f$  est une fonction polynôme donc dérivable sur  $[0; 1]$ . Pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(1-x)$$

Sur l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $6x \geq 0$  et  $1-x \geq 0$ , donc  $f'(x) \geq 0$ . La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[0; 1]$ .  
Dressons son tableau de variations :

$x$	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

b. Démontrons l'existence d'une unique valeur  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  telle que  $f(\alpha) = 0,9$  :

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$ . De plus,  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Comme  $0,9 \in [0; 1]$ , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0,9$  possède une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

c. Donnons un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de la valeur de  $\alpha$  :

Par balayage à la calculatrice, on obtient :

$$f(0,80) \approx 0,896 < 0,9$$

$$f(0,81) \approx 0,905 > 0,9$$

On en déduit l'encadrement :  $0,80 \leq \alpha \leq 0,81$ .

d. Interprétons la valeur de  $\alpha$  dans le contexte de l'exercice :

La valeur de  $\alpha$  représente la probabilité minimale qu'un lancer soit réussi par le joueur pour que la probabilité de réussite d'au moins deux de ses lancers sur trois lors d'une session soit égale à 0,9 (soit 90 % de chances).

## Exercice 3

---

1. a. Montrons que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan :

Calculons les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 3 - 2 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 1 - 2 \\ 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles (par exemple,  $\frac{-2}{1} = -2$  alors que  $\frac{1}{-1} = -1$ ). Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan  $(ABC)$ .

b. Montrons que le vecteur  $\vec{n}(1; 4; 1)$  est normal au plan  $(ABC)$  :

Calculons les produits scalaires de  $\vec{n}$  avec les vecteurs directeurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times (-2) + 4 \times 1 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 1 + 4 \times (-1) + 1 \times 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(ABC)$ , il est donc normal au plan  $(ABC)$ .

c. Dédouons-en une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  :

Puisque  $\vec{n}(1; 4; 1)$  est normal au plan  $(ABC)$ , ce dernier a une équation cartésienne de la forme  $x + 4y + z + d = 0$ . Comme  $A(1; 2; 3) \in (ABC)$ , ses coordonnées vérifient cette équation :

$$1 + 4 \times 2 + 3 + d = 0 \implies 12 + d = 0 \implies d = -12$$

Une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est donc :  $x + 4y + z - 12 = 0$ .

2. a. Déterminons une équation paramétrique de la droite  $(d)$  perpendiculaire au plan  $(ABC)$  passant par  $D$  :

La droite  $(d)$  étant perpendiculaire au plan  $(ABC)$ , elle a pour vecteur directeur le vecteur normal  $\vec{n}(1; 4; 1)$ . Passant par le point  $D(3; -2; -1)$ , une représentation paramétrique de  $(d)$  est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b. Déterminons les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$  :

Le point  $H$  est l'intersection de la droite  $(d)$  et du plan  $(ABC)$ . Ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{aligned} (3 + t) + 4(-2 + 4t) + (-1 + t) - 12 = 0 &\iff 3 + t - 8 + 16t - 1 + t - 12 = 0 \\ &\iff 18t - 18 = 0 \\ &\iff t = 1 \end{aligned}$$

En remplaçant  $t = 1$  dans les équations paramétriques de la droite  $(d)$ , on obtient les coordonnées de  $H$  :

$$\begin{cases} x_H = 3 + 1 = 4 \\ y_H = -2 + 4 \times 1 = 2 \\ z_H = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

On a donc  $H(4; 2; 0)$ .

c. Dédisons-en la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$  :

La distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$  est égale à la distance  $DH$  :

$$DH = \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

3. a. Montrons que  $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$  :

On calcule les normes des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ainsi que leur produit scalaire :

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$AC = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 3 = -2 - 1 - 6 = -9$$

Or, on sait que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ , d'où :

$$-9 = 3 \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC}) \implies \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = -\frac{3}{\sqrt{11}} = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

b. Dédisons-en la valeur exacte de  $\sin(\widehat{BAC})$  :

On utilise la relation fondamentale de la trigonométrie :

$$\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 \implies \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 \implies \frac{9}{11} + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1$$

On a donc  $\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}$ . La mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$  appartenant à l'intervalle  $[0; \pi]$ , son sinus est positif. Ainsi :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{\frac{2}{11}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

c. Montrons que l'aire du triangle  $ABC$  vaut  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  :

L'aire  $\mathcal{B}$  du triangle  $ABC$  est donnée par la formule :

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

4. Déterminons le volume du tétraèdre  $ABCD$  :

La hauteur associée à la base  $ABC$  est la distance  $DH = 3\sqrt{2}$ . Le volume du tétraèdre est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \frac{18}{2} = 3$$

## Exercice 4

---

### 1. Affirmation 1 : FAUSSE

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = 5 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4 = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4$$

$$f''(x) = -\frac{5}{2} \times 4 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3 = 5 \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3$$

Le signe de  $f''(x)$  dépend de celui de  $-\frac{1}{2}x + 3$  :

$$-\frac{1}{2}x + 3 \geq 0 \iff x \leq 6$$

Ainsi, la dérivée seconde  $f''$  change de signe sur  $\mathbb{R}$  (positive pour  $x \leq 6$  et négative pour  $x \geq 6$ ). La fonction  $f$  n'est donc pas convexe sur  $\mathbb{R}$  entier (elle est concave sur  $[6; +\infty[$ ).

### 2. Affirmation 2 : VRAIE

Le nombre total de tirages simultanés de 5 jetons parmi 32 est de :

$$\binom{32}{5} = 201\,376$$

Parmi les nombres de 1 à 32, il y a 4 multiples de 8 (qui sont 8, 16, 24, 32). Il y a donc  $32 - 4 = 28$  jetons qui ne sont pas des multiples de 8.

Le nombre de tirages possibles ne contenant aucun multiple de 8 est :

$$\binom{28}{5} = 98\,280$$

Par conséquent, le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 8 est égal à la différence :

$$201\,376 - 98\,280 = 103\,096$$

### 3. Affirmation 3 : FAUSSE

Calculons d'abord  $P(B)$  à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

D'après l'arbre, on a  $P(A) = \frac{2}{5}$  donc  $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ .

De même,  $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{7}{10}$  d'où  $P_{\bar{A}}(B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ . Ainsi :

$$P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

Calculons maintenant la probabilité conditionnelle  $P_B(\bar{A})$  :

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{10}}{\frac{14}{50}} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \frac{9}{14} \neq \frac{9}{50}$$

### 4. Affirmation 4 : VRAIE

La fonction  $h$  définie par  $h(x) = e^{-x} \sin(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables :

$$h'(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)$$

En remplaçant dans le membre de gauche de l'équation différentielle (E) :

$$h'(x) + h(x) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) = e^{-x} \cos(x)$$

La fonction  $h$  est donc bien une solution de l'équation  $(E)$ .

### 5. Affirmation 5 : FAUSSE

L'équation différentielle homogène associée est  $y' + y = 0$ . Ses solutions sont de la forme  $x \mapsto Ce^{-x}$  où  $C \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $h(x) = e^{-x} \sin(x)$  est une solution particulière de  $(E)$ , les solutions de  $(E)$  s'obtiennent en ajoutant la solution générale de l'équation homogène et la solution particulière, soit :

$$k(x) = Ce^{-x} + e^{-x} \sin(x) = e^{-x}(C + \sin(x)) \quad (C \in \mathbb{R})$$

Les fonctions proposées dans l'affirmation ne décrivent donc pas l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$ .