L'Enseignant
Cours particuliers en ligne

Correction - Mathématiques 1ère

Epreuve anticipée de 1ère - spé - Amérique du Nord

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

Question 1

Le calcul est $1/2 + 3/2imes4$. Selon l'ordre des opérations, la multiplication est prioritaire :

$$\frac{3}{2} \times 4 = \frac{12}{2} = 6$$
$$\frac{1}{2} + 6 = \frac{1}{2} + \frac{12}{2} = \frac{13}{2}$$

La bonne réponse est B.

Question 2

Soit V_T le volume total de l'iceberg. Le volume visible est 10% du volume total, soit $0,10 \times V_T$. On nous donne que ce volume visible est de $150 \mathrm{~km}^3$. Donc :

$$0,10 \times V_T = 150$$

On en déduit :

$V_T = \frac{150}{0{,}10} = 1500$

Le volume total est $1500\ \mathrm{km}^3$. La bonne réponse est B.

Question 3

Multiplier le prix par $0,845$ signifie que le nouveau prix représente $84,5\%$ de l'ancien prix. La variation en pourcentage est :

$$(0,845 - 1) \times 100\% = -0,155 \times 100\% = -15,5\%$$

Cela signifie que le prix a baissé de $15,5\%$. La bonne réponse est D.

Question 4

La fonction $A(x) = (x + 5)(x + 8)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $x = -5$ et $x = -8$. Le coefficient dominant (celui de x^2 si on développe $A(x)$) est positif (ici 1), donc la parabole est ouverte vers le haut. Ainsi, $A(x)$ est positive à l'extérieur des racines et négative entre les racines. Plus précisément :

Le tableau de signes correspondant est :

x	$-\infty$	-8		-5	$+\infty$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La bonne réponse est C.

Question 5

L'alphabet contient 26 lettres. Les voyelles sont A, E, I, O, U, Y, soit 7 voyelles. Le mot SINGE est composé de 5 lettres : S, I, N, G, E. Parmi ces lettres, les voyelles sont I, E, soit 2 voyelles. La probabilité $P_M(V)$ est la probabilité de choisir une voyelle sachant que la lettre choisie est dans le mot SINGE. Il y a 2 voyelles parmi les 5 lettres du mot SINGE. Donc :

$$P_M(V) = \frac{2}{5}$$

La bonne réponse est B.

Question 6

La représentation graphique de la fonction affine f passe par les points $(0, 30)$ et $(3, 0)$. Le coefficient directeur m est :

$$m = \frac{0-30}{3-0} = \frac{-30}{3} = -10$$

L'ordonnée à l'origine est $b = 30$. L'expression algébrique de f est donc $f(x) = -10x + 30$. La bonne réponse est C.

Question 7

Développons l'expression $(x+2)^2 - (1-x)^2$:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (1-x)^2 &= (x^2+4x+4) - (1-2x+x^2) \\ &= x^2+4x+4-1+2x-x^2 \\ &= (x^2-x^2) + (4x+2x) + (4-1) \\ &= 6x+3\end{aligned}$$

La bonne réponse est B.

Question 8

Résolvons l'équation $2(x-4)-(2x+1)=0$:

$$\begin{aligned} 2x-8-2x-1 &= 0 \\ -9 &= 0 \end{aligned}$$

Cette égalité est fausse. L'équation n'admet donc aucune solution. La bonne réponse est C.

Question 9

Simplifions l'expression $E=\frac{2\times 3^2}{27\times 2^3}$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\times 9}{27\times 8} \\ &= \frac{18}{216} \end{aligned}$$

On peut simplifier cette fraction en divisant le numérateur et le dénominateur par 18 :

$E=\frac{18\div 18}{216\div 18}=\frac{1}{12}$

La bonne réponse est B.

DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1 (6 points)

Partie A

L'urne contient 1 boule rouge (R) et 9 boules vertes (V), soit 10 boules au total. Les tirages sont effectués avec remise.

R_1 est l'événement "La première boule tirée est rouge".

R_2 est l'événement "La deuxième boule tirée est rouge".

On en déduit les probabilités :

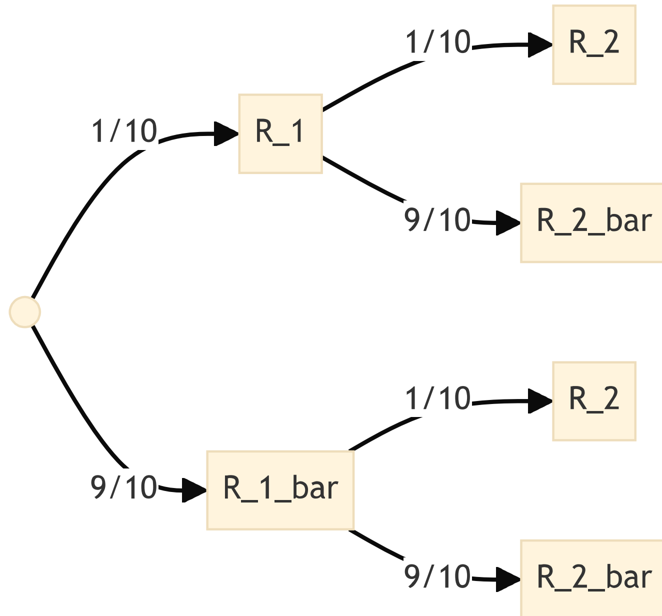
$$P(R_1) = \frac{1}{10}$$
$$P(V_1) = P(\overline{R_1}) = \frac{9}{10}$$

Comme les tirages sont avec remise, les probabilités des événements au second tirage sont identiques aux premiers tirages :

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{10} \qquad P_{R_1}(V_2) = P_{R_1}(\overline{R_2}) = \frac{9}{10}$$
$$P_{V_1}(R_2) = \frac{1}{10} \qquad P_{V_1}(V_2) = P_{V_1}(\overline{R_2}) = \frac{9}{10}$$

1. Arbre pondéré

Arbre de probabilités :



2. Variable aléatoire X

X est le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la somme reçue moins les 1 euro de frais de participation.

Si deux boules rouges sont tirées (R_1R_2), le joueur reçoit 3 euros. Le gain est $X = 3 - 1 = 2$.

Si deux boules vertes sont tirées (V_1V_2), le joueur reçoit 1 euro. Le gain est $X = 1 - 1 = 0$.

Sinon (un tirage rouge et un vert, R_1V_2 ou V_1R_2), le joueur ne reçoit pas d'argent. Le gain est $X = 0 - 1 = -1$.

2.a. Valeurs prises par X

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 0 ou -1.

2.b. Démontrer $P(X=-1)=18/100$

L'événement $X=-1$ correspond aux tirages R_1V_2 ou V_1R_2.

$$P(R_1V_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(V_2)=\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{100}$$
$$P(V_1R_2)=P(V_1)\times P_{V_1}(R_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{100}$$

Ces deux événements étant disjoints :

$$P(X=-1)=P(R_1V_2)+P(V_1R_2)=\frac{9}{100}+\frac{9}{100}=\frac{18}{100}$$

C'est bien le résultat attendu.

2.c. Loi de probabilité de X

Calculons les probabilités pour les autres valeurs de X :

$X=2$ correspond à R_1R_2 : $P(X=2)=P(R_1R_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$.

$X=0$ correspond à V_1V_2 : $P(X=0)=P(V_1V_2)=P(V_1)\times P_{V_1}(V_2)=\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{81}{100}$.

Le tableau de la loi de probabilité de X est :

k	-1	0	2
$P(X=k)$	$18/100$	$81/100$	$1/100$

2.d. Calcul de l'espérance de X et interprétation

L'espérance $E(X)$ est donnée par la formule $E(X) = \sum k \times P(X = k)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1) \times \frac{18}{100} + (0) \times \frac{81}{100} + (2) \times \frac{1}{100} \\ &= -\frac{18}{100} + 0 + \frac{2}{100} \\ &= -\frac{16}{100} \\ &= -0,16 \end{aligned}$$

Interprétation : L'espérance $E(X) = -0,16$ euro. En moyenne, le joueur perd $0,16$ euro (soit 16 centimes) par partie jouée. Le jeu est donc défavorable au joueur.

Partie B

L'urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes ($0 \leq n \leq 10$). Les tirages sont avec remise. La variable aléatoire Y représente le gain algébrique.

Les probabilités de tirer une boule rouge (R) ou verte (V) sont :

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{n}{10} \\ P(V) &= \frac{10-n}{10} \end{aligned}$$

Les gains possibles sont les mêmes : $Y = 2$ pour RR, $Y = 0$ pour VV, $Y = -1$ pour RV ou VR.

1. Démontrer $E(Y) = (4n^2 - 20n)/100$

Calculons les probabilités des différents événements :

Pour $Y = 2$ (tirer R_1R_2) : $P(Y = 2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{n}{10} \times \frac{n}{10} = \frac{n^2}{100}$.

Pour $Y = 0$ (tirer V_1V_2) : $P(Y = 0) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{10-n}{10} \times \frac{10-n}{10} = \frac{(10-n)^2}{100}$.

Pour $Y=-1$ (tirer R_1V_2 ou V_1R_2) :
$P(R_1V_2)=\frac{n}{10}\times\frac{10-n}{10}=\frac{n(10-n)}{100}$.
$P(V_1R_2)=\frac{10-n}{10}\times\frac{n}{10}=\frac{n(10-n)}{100}$.
Donc $P(Y=-1)=P(R_1V_2)+P(V_1R_2)=\frac{2n(10-n)}{100}=\frac{20n-2n^2}{100}$.

L'espérance $E(Y)$ est alors :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= 2\times P(Y=2)+0\times P(Y=0)+(-1)\times P(Y=-1)\\
&= 2\times\frac{n^2}{100}+0\times\frac{(10-n)^2}{100}+(-1)\times\frac{20n-2n^2}{100}\\
&= \frac{2n^2}{100}-\frac{20n-2n^2}{100}\\
&= \frac{2n^2-20n+2n^2}{100}\\
&= \frac{4n^2-20n}{100}
\end{aligned}$$

Ceci correspond à l'expression à démontrer.

2. Pour combien de boules rouges le jeu est-il équitable ?

Le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle, c'est-à-dire $E(Y)=0$.

$$\begin{aligned}
\frac{4n^2-20n}{100} &= 0\\
4n^2-20n &= 0\\
4n(n-5) &= 0
\end{aligned}$$

Cette équation a deux solutions :

$4n=0\Rightarrow n=0.$

$n-5=0\Rightarrow n=5.$

Les valeurs de n doivent être des entiers naturels entre 0 et 10. Les deux solutions $n = 0$ et $n = 5$ sont valides. Le jeu est équitable s'il y a 0 boule rouge ou 5 boules rouges dans l'urne.

Exercice 2 (4 points)

Partie A

1. Puissance électrique à 11h00

En lisant le graphique, pour $x = 11$ (11h00), la courbe C_f indique une puissance électrique de $7\ \mathrm{kW}$.

2. Résolution graphique de $f(x) \geq 5$ et interprétation

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 5$, on trace la droite horizontale d'équation $y = 5$. On observe les valeurs de x pour lesquelles la courbe C_f est située au-dessus ou sur cette droite. D'après le graphique, la courbe est au-dessus de la ligne $y = 5$ pour x appartenant à l'intervalle $[9, 15]$.

Interprétation : Les panneaux solaires de Camille produisent une puissance électrique d'au moins $5\ \mathrm{kW}$ entre 9h00 et 15h00.

Partie B

1. Déterminer la nature de la suite (c_n)

Le coût augmente de 6% chaque année. Cela signifie qu'il est multiplié par $1+\frac{6}{100}=1+0,06=1,06$. On a donc $c_{n+1}=1,06\times c_n$. La suite (c_n) est une suite géométrique de raison $q=1,06$ et de premier terme $c_0=0,15$ euro.

2. Exprimer c_n en fonction de n

Puisque (c_n) est une suite géométrique, son terme général est $c_n=c_0\times q^n$. Ainsi :

$$c_n=0,15\times(1,06)^n$$

3. Calcul du coût pour 1 kWh consommé en 2030

L'année 2030 correspond à $n=2030-2020=10$. Le coût pour $1\ \mathrm{kWh}$ consommé en 2030 est donc c_{10}. Le calcul permettant d'obtenir ce coût est :

$$c_{10}=0,15\times(1,06)^{10}$$

4. Programme Python

4.a. Représentation des variables c et s

La variable c représente le coût en euros par kilowattheure (kWh) pour l'année en cours (2020+n). Elle commence à $c_0=0,15$ et est multipliée par $1,06$ à chaque itération (chaque année), représentant ainsi le coût c_n.

La variable `s` représente le total cumulé des économies réalisées en euros depuis l'année 2020 grâce à l'utilisation des panneaux solaires. Elle s'incrémente de `c * 2000` à chaque année, puisque $2000\ \mathrm{kWh}$ sont évités annuellement.

4.b. Interprétation du résultat affiché (16)

Le programme calcule le nombre d'années (n) nécessaires pour que le montant total des économies (`S`) dépasse ou atteigne le coût initial de l'installation des panneaux solaires (7000 €). L'affichage de 16 signifie que la variable n a atteint la valeur 16 à la fin de la boucle `while`. Cela veut dire qu'il faut 16 années à partir de 2020 pour que le cumul des économies dépasse ou égale 7000 €. Donc, en l'année $2020 + 16 = 2036$, Camille aura rentabilisé son investissement.

Exercice 3 (4 points)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x - 4)e^{-0,5x} + 5$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x + 6)e^{-0,5x}$

La fonction $f(x)$ est de la forme $u(x)v(x) + C$ où $u(x) = 4x - 4$ et $v(x) = e^{-0,5x}$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et la dérivée d'un produit est $u'v + uv'$. La dérivée de la constante 5 est 0.

$u'(x) = 4$

$v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$ (en utilisant la formule $(e^{ax})' = ae^{ax}$)

Calculons $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 4e^{-0,5x} + (4x-4)(-0,5e^{-0,5x}) \\ &= e^{-0,5x}[4 + (4x-4)(-0,5)] \\ &= e^{-0,5x}[4 - 2x + 2] \\ &= e^{-0,5x}(-2x+6) \\ &= (-2x+6)e^{-0,5x} \end{aligned}$$

Le résultat est bien celui attendu.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f

L'expression de la dérivée est $f'(x) = (-2x+6)e^{-0,5x}$. L'exponentielle $e^{-0,5x}$ est toujours strictement positive. Le signe de $f'(x)$ dépend donc uniquement du signe du facteur $(-2x+6)$.

$-2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3.$

Si $x < 3$, alors $-2x > -6 \Rightarrow -2x + 6 > 0$. Donc $f'(x) > 0$.

Si $x > 3$, alors $-2x < -6 \Rightarrow -2x + 6 < 0$. Donc $f'(x) < 0$.

On en déduit les variations de f :

Sur l'intervalle $]-\infty, 3]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante.

Sur l'intervalle $[3, +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante.

La fonction f admet un maximum local en $x = 3$.

Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$Signe de (-2x+6)$	$+$	0	$-$
$Signe de e^{-0,5x}$	$+$	$\vert$	$+$
$Signe de f'(x)$	$+$	0	$-$
$Variations de f$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$

Calculons la valeur du maximum $f(3)$:

$$\begin{aligned} f(3) &= (4\times 3-4)e^{-0,5\times 3}+5 \\ &= (12-4)e^{-1,5}+5 \\ &= 8e^{-1,5}+5 \end{aligned}$$

3. La courbe C_f admet-elle des points pour lesquels la tangente est horizontale ?

Une tangente est horizontale si et seulement si sa pente est nulle, c'est-à-dire si $f'(x)=0$. D'après l'étude de signe précédente, $f'(x)=0$ si et seulement si $-2x+6=0$, ce qui donne $x=3$.

La courbe C_f admet donc un seul point pour lequel la tangente est horizontale. Les coordonnées de ce point sont $(3, f(3))$, soit $(3, 8e^{-1,5}+5)$.

© L'Enseignant - Méthode 3P