BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

MERCREDI 17 JUIN 2026

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

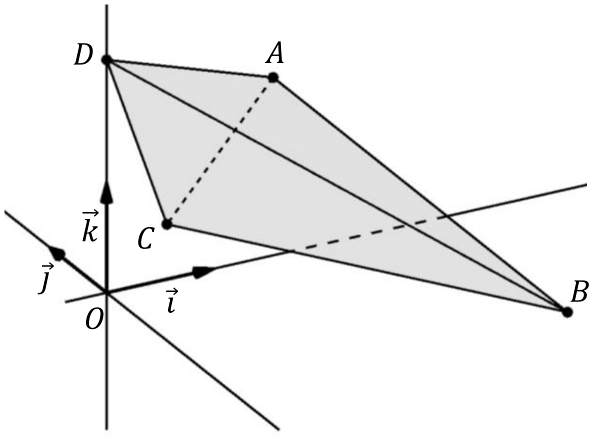
Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points :
$A(2\,;1\,;1)$, $B(3\,;\,-2\,;0)$, $C(0\,;\,-1\,;\,1)$ et $D(0\,;\,0\,;\,2)$.



1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x - y + 4z - 5 = 0.$$

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H\left(-\frac{1}{6}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{4}{3}\right)$.

5.

a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b. Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

6.

a. En déduire que le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à 1.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

b. On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$.
En déduire l'aire du triangle BCD.

7. Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0\,;0\,;k)$ où k est un réel.
   a. Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A, B, C et D_k sont coplanaires.
      Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC) ?
   b. Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) ?

Exercice 2 (5 points)

Un bassin destiné à l'élevage des truites contient $30\,000$ litres d'eau, régulièrement renouvelée.
Pour vérifier la présence éventuelle de substances polluantes dans le bassin, on procède à des analyses régulières.

On étudie dans les deux parties ci-dessous un cas de contamination de l'eau par une substance polluante à l'aide de deux modèles différents.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : modèle discret

On note V_n le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin, n heures après le début du phénomène de pollution. On a ainsi $V_0 = 0$.

On admet que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}995\, V_n + 6$.

1. Calculer V_1 et V_2.
2. Recopier et compléter le programme ci-contre pour qu'il renvoie le volume en litre de substance polluante présente dans le bassin après n heures.

```
def volume(n):
   v = …
   for k in range(n):
     v = …………
   return v
```

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.
4. Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

Partie B : modèle continu

On note $v(t)$ le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin à l'instant *t*, en heure.
On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et on note v' sa fonction dérivée.

On considère que le phénomène de pollution débute au temps $t = 0$; ainsi $v(0) = 0$.
On admet que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} : y' = -0{,}005y + 6,$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

1.

   a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

   b. Montrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $$v(t) = 1200(1 - \mathrm{e}^{-0,005t}).$$

   c. Calculer la limite de v en $+\infty$.

   d. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin nécessite un nettoyage complet. Selon ce modèle, le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

3. Pour pouvoir dépolluer rapidement le bassin et éviter de lourdes conséquences sur l'élevage, il est préconisé que le volume de la substance polluante ne dépasse pas 50 litres.
   Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume de la substance dépasse 50 litres dans le bassin.
   En donner la valeur en heure et minute, arrondie à la minute.

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On désigne par « musiciens professionnels » l'ensemble des femmes et hommes pratiquant un instrument de manière professionnelle.

1. Une étude a été réalisée auprès des musiciens professionnels pratiquant différents genres musicaux (Pop, Rap, Rock, Classique, etc.).

   Cette étude indique que :
   - 52 % des musiciens professionnels jouent de la Pop ;
   - parmi les musiciens professionnels jouant de la Pop, 32 % sont des femmes ;
   - 20 % des musiciens professionnels sont des femmes.

   On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des musiciens professionnels.
   On note :
   - O l'évènement : « la personne joue de la Pop » ;
   - F l'évènement : « la personne est une femme ».

   Affirmation 1 : Si la personne choisie est une femme, alors la probabilité qu'elle joue de la Pop est de $0,832$.

2. La proportion de musiciens professionnels au sein de la population active dans le secteur de la culture est estimée à 6,2 %.
   On prélève au hasard et de manière indépendante un échantillon de $5\,000$ personnes au sein de cette population. La population considérée est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout échantillon ainsi défini, associe le nombre de musiciens professionnels dans l'échantillon.

Affirmation 2 : En arrondissant le résultat au dixième, on a $P(X \leq 340) \approx 0{,}4$.

Affirmation 3 : En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer qu'il y a plus de 95 % de chance que, sur cet échantillon de $5\,000$ actifs dans le secteur de la culture, le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390.

3. Un jeu sur le thème de la culture de la Pop est proposé à 10 personnes dont 4 sont des musiciens professionnels. Deux équipes de 5 joueurs s'affrontent. Elles sont chacune constituées de 2 musiciens professionnels et de 3 personnes qui ne le sont pas.

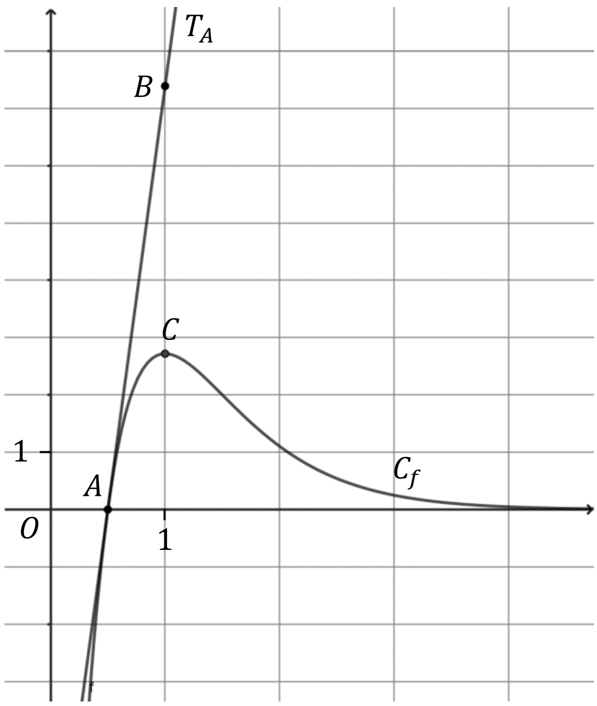
Affirmation 4 : On peut former ainsi 120 équipes différentes.

Exercice 4 (6 points)

Partie A

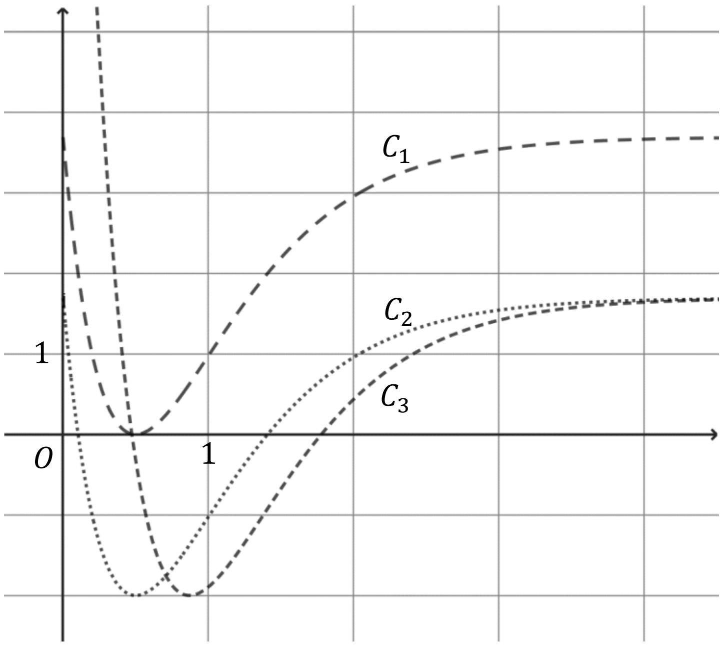
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe représentative C_f dans un repère orthogonal. On note f' sa fonction dérivée.

On précise que :
- la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1 ;
- la tangente T_A à la courbe C_f au point $A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ passe par le point $B(1\,;\ \mathrm{e}^2)$.



1. À l'aide du graphique ci-contre :
   - a. Donner $f'(1)$.
   - b. Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0\,; 3]$.
2. Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Parmi les trois courbes C_1 , C_2 et C_3 ci-dessous, deux représentent des primitives de la fonction f. Indiquer lesquelles et justifier.



Partie B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme ci-contre (Fig. 1). La dimension de $0{,}3$ cm indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en partie A, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0{,}5\,;\alpha]$.
Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.
L'ensemble est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (Fig. 2) d'unité 1 cm.

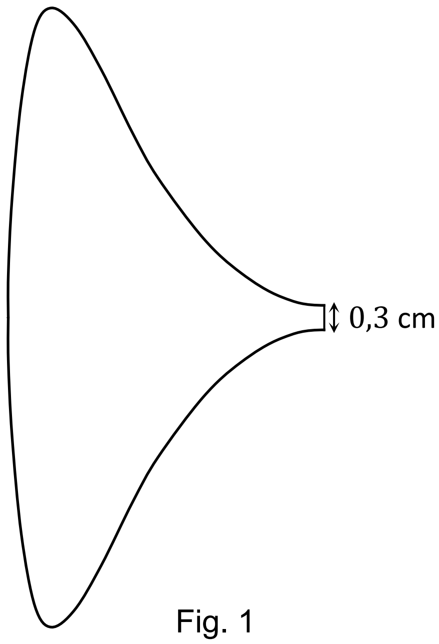


Fig. 1

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

1.

a. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$f(x) = \mathrm{e}^2 \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

(On pourra poser $X = 2x-1$).

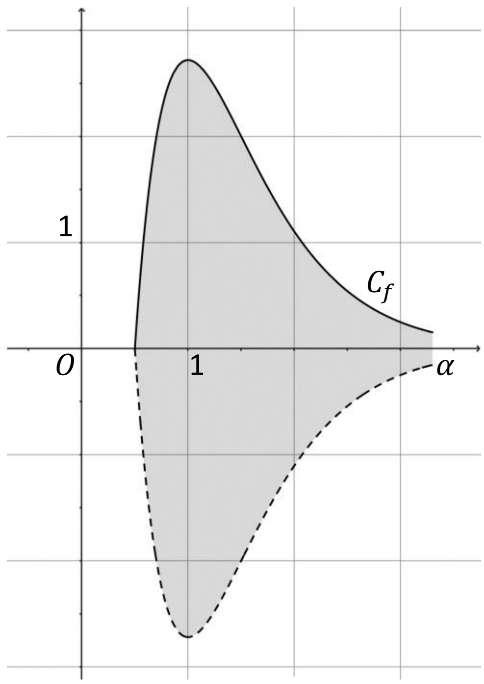


Fig. 2

2.

a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x+3}$.

b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha) = 0{,}15$.
Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

Partie C

On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la partie B. On précise que cette plaque a une épaisseur de $0{,}2$ cm.

1. On considère :

$$I = \int_{0,5}^{3,3} f(x)dx.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à $3{,}6$.

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à :

$$\mathit{Aire\ du\ logo}\ \times \mathit{épaisseur\ de\ la\ plaque}.$$

Déterminer le volume du porte-clé en cm^3, arrondi au dixième.