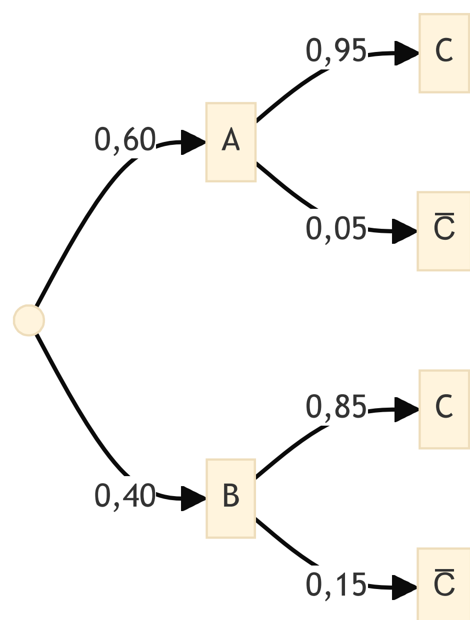
Exercice 1 : Probabilités

Un supermarché s'approvisionne en tomates auprès de deux fournisseurs A et B. On note A l'événement « la tomate provient du fournisseur A », B l'événement « la tomate provient du fournisseur B » et C l'événement « la tomate est commercialisable ».

Partie A

1. Voici l'arbre de probabilité complété représentant la situation :

Arbre de probabilités :



2. a. La probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A est donnée par :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$$

2. b. D'après la formule des probabilités totales, comme A et B forment une partition de l'univers, on a :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A \cap C) + P(B) \times P_B(C)$$

En remplaçant par les valeurs connues, on obtient :

$$0,91 = 0,57 + 0,40 \times P_B(C) \implies 0,40 \times P_B(C) = 0,34 \implies P_B(C) = \frac{0,34}{0,40} = 0,85$$

2. c. On cherche à comparer $P_{\bar{C}}(A)$ et $P_{\bar{C}}(B)$ sachant que la tomate n'est pas commercialisable. Calculons ces probabilités conditionnelles :

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,91 = 0,09$$

$$P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,60 \times 0,05}{0,09} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

$$P_{\bar{C}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,40 \times 0,15}{0,09} = \frac{0,06}{0,09} = \frac{2}{3}$$

On constate que $P_{\bar{C}}(A) = \frac{1}{2} P_{\bar{C}}(B)$. Le responsable des achats a donc raison : il y a bien deux fois moins de chances que la tomate provienne du fournisseur A sachant qu'elle n'est pas commercialisable.

Partie B

1. a. Le prélèvement de 15 tomates est assimilé à un tirage avec remise. Il s'agit d'une répétition de 15 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de tomates non commercialisables, dont la probabilité individuelle de succès est $p = 0,09$. Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,09$:

$$X \sim B(15\,;\,0,09)$$

1. b. La probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables est :

$$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times (0,09)^2 \times (0,91)^{13} = 105 \times 0,0081 \times 0,29345 \approx 0,250$$

1. c. La probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables est :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,243 + 0,361 + 0,250 \approx 0,853$$

2. a. Soit $F_n = \frac{X_n}{n}$ avec $X_n \sim B(n\,;\,0,09)$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(F_n) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{n \times 0,09}{n} = 0,09$$

Pour la variance :

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{n \times 0,09 \times 0,91}{n^2} = \frac{0,0819}{n}$$

2. b. D'après l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev appliquée à la variable aléatoire F_n pour tout réel $\alpha > 0$:

$P(|F_n - E(F_n)| \geq \alpha) \leq \frac{V(F_n)}{\alpha^2}$

Ici, on s'intéresse à $P(0,04 < F_n < 0,14) = P(|F_n - 0,09| < 0,05)$. En posant $\alpha = 0,05$:

$$P(|F_n - 0,09| \geq 0,05) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}05^2} = \frac{0{,}0819}{0{,}0025 \times n} = \frac{32{,}76}{n}$$

Par passage à l'événement contraire, on obtient bien :

$$P(0,04 < F_n < 0,14) = 1 - P(|F_n - 0,09| \geq 0,05) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$$

2. c. Pour un échantillon de $n = 500$ tomates, la fréquence observée de tomates non commercialisables est $f = \frac{55}{500} = 0,11$. L'inégalité précédente garantit que :

$$P(0,04 < F_{500} < 0,14) \geq 1 - \frac{32{,}76}{500} \approx 0,934$$

Comme la fréquence observée de $0,11$ appartient à l'intervalle $]0,04\,;\ 0,14[$, ce résultat est tout à fait conforme à ce que l'on pouvait attendre.

Exercice 2 : Analyse et Suites

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

1. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \iff x\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 0$$

Une première solution est $x = 0$. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \iff \sqrt{1+x^2} = 2 \iff 1 + x^2 = 4 \iff x^2 = 3$$

D'où deux autres solutions : $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$. L'ensemble des solutions est :

$$S = \{-\sqrt{3}\,;\ 0\,;\ \sqrt{3}\}$$

2. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur strictement positif. Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

2. b. Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété $P_n : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$ est vraie.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. On a bien $1 \leq 1 \leq \sqrt{2} < \sqrt{3}$, soit $1 \leq u_0 \leq u_1 < \sqrt{3}$. La propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 0$, la propriété P_n soit vraie : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer f à cette inégalité :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3})$$

On sait que $f(1) = \sqrt{2} \geq 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et de plus $\sqrt{3}$ est point fixe de f, donc $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

On obtient ainsi :

$$1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3} \implies 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$$

L'hérédité est prouvée.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$, elle est donc convergente vers une limite réelle L appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\sqrt{3}]$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la limite L satisfait l'équation $f(L) = L$. D'après la partie A, les seules solutions de cette équation sont $-\sqrt{3}, 0$ et $\sqrt{3}$. Puisque $1 \leq L \leq \sqrt{3}$, on a nécessairement :

$$L = \sqrt{3}$$

3. a. Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{3(1+u_n^2)-4u_n^2} = \frac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4 \times \frac{u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 4$. Son premier terme est :

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3-u_0^2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

3. b. On en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 0,5 \times 4^n$. Exprimons ensuite u_n^2 en fonction de v_n :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2} \implies v_n(3-u_n^2) = u_n^2 \implies 3v_n = u_n^2(1+v_n) \implies u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n}$$

Comme $u_n \geq 0$, on obtient en remplaçant v_n :

$$u_n = \sqrt{\frac{3\times 0{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}} = \sqrt{\frac{1{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}}$$

3. c. Pour déterminer la limite de u_n, divisons le numérateur et le dénominateur sous la racine par 4^n :

$$u_n = \sqrt{\frac{1{,}5}{\frac{1}{4^n}+0{,}5}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$. Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\frac{1{,}5}{0{,}5}} = \sqrt{3}$$

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

1. Voici le script Python complété pour lister les p premiers termes de la suite (S_n) :

```
python
from math import *

def termes(p):
    u = 1
    S = 0
    L = []
    for i in range(p):
        S = S + u**2
        u = 2 * u / sqrt(1 + u**2)
        L.append(S)
    return L
```

2. Pour tout entier naturel k, on a démontré que $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$. En passant au carré :

$$1 \leq u_k^2 \leq 3$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ (ce qui représente n termes) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} 3 \implies n \leq S_n \leq 3n$$

3. Déterminons les limites de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$:

Puisque $S_n \geq n$ et que $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, on obtient par comparaison :

$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

D'autre part, en divisant l'encadrement par $n^2 > 0$:

$\frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

1. Pour vérifier si la droite Δ passe par un point, on cherche s'il existe une valeur du paramètre t correspondante :

Pour $C(1\,;\,1\,;\,1)$: les équations $1 + 2t = 1$, $1 + t = 1$ et $1 + 2t = 1$ donnent de manière cohérente $t = 0$. Ainsi, $C \in \Delta$.

Pour $A(4\,;\,2\,;\,2)$: le système exige $1 + 2t = 4 \implies t = 1,5$, ce qui donne pour la deuxième coordonnée $y = 1 + 1,5 = 2,5 \neq 2$. Ainsi, $A \notin \Delta$.

2. a. Un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{u}(2\,;\,1\,;\,2)$. Le plan $\mathcal{P}$ étant orthogonal à Δ, $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. L'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ s'écrit donc sous la forme :

$2x + y + 2z + d = 0$

Comme $A(4\,;\,2\,;\,2) \in \mathcal{P}$:

$2(4) + 2 + 2(2) + d = 0 \implies 8 + 2 + 4 + d = 0 \implies d = -14$

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc bien :

$2x + y + 2z - 14 = 0$

2. b. Testons les coordonnées des points :

Pour $B(5\,;\,-2\,;\,3)$: $2(5) + (-2) + 2(3) - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$. Donc $B \in \mathcal{P}$.

Pour $C(1\,;\,1\,;\,1)$: $2(1) + 1 + 2(1) - 14 = -9 \neq 0$. Donc $C \notin \mathcal{P}$.

3. a. Démontrons que $D(3\,;\,2\,;\,3)$ est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$:

D'une part, $D \in \mathcal{P}$ car : $2(3) + 2 + 2(3) - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$.

D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3-1\\2-1\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Ce vecteur est colinéaire (et même identique) au vecteur normal $\vec{u}(2\,;\,1\,;\,2)$ de $\mathcal{P}$. Ainsi, la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. D est bien le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.

3. b. Les points A, B et D appartiennent tous au plan $\mathcal{P}$. Or, le point C n'appartient pas à $\mathcal{P}$ (d'après 2.b). Par conséquent, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. c. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-4\\-2-2\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3-4\\2-2\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-1) + (-4) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

3. d. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant orthogonaux, le triangle ABD est rectangle en A. L'aire $\mathcal{B}$ de sa base est :

$$\mathcal{B} = \frac{AB \times AD}{2} = \frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2} \times \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

La hauteur associée est la distance CD puisque D est le projeté orthogonal de C sur le plan $(ABD) = \mathcal{P}$:

$$h = CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Le volume V du tétraèdre $ABCD$ est donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3$$

4. a. Vérifions que le point $H\left(\frac{73}{29}\,;\,\frac{-4}{29}\,;\,\frac{51}{29}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) :

Le vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC}(-4\,;\,3\,;\,-2)$. Cherchons si $H \in (BC)$ en résolvant $\overrightarrow{CH} = k\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}\frac{73}{29}-1\\ \frac{-4}{29}-1\\ \frac{51}{29}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{44}{29}\\ -\frac{33}{29}\\ \frac{22}{29}\end{pmatrix}=-\frac{11}{29}\begin{pmatrix}-4\\ 3\\ -2\end{pmatrix}=-\frac{11}{29}\overrightarrow{BC}$$

Le point H appartient donc bien à la droite (BC). Calculons à présent le produit scalaire $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{73}{29}-4\\ \frac{-4}{29}-2\\ \frac{51}{29}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{43}{29}\\ -\frac{62}{29}\\ -\frac{7}{29}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{29}((-43)\times(-4)+(-62)\times 3+(-7)\times(-2))=-\frac{1}{29}(172-186+14)=0$$

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ étant orthogonal à la droite (BC), H est bien le projeté orthogonal de A sur (BC).

4. b. L'aire du triangle ABC est donnée par :

$$\text{Aire}(ABC)=\frac{BC\times AH}{2}$$

$$BC=\sqrt{(-4)^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$$

$$AH=\frac{1}{29}\sqrt{(-43)^2+(-62)^2+(-7)^2}=\frac{1}{29}\sqrt{1849+3844+49}=\frac{\sqrt{5742}}{29}=\frac{\sqrt{198\times 29}}{29}=\sqrt{\frac{198}{29}}$$

D'où l'aire recherchée :

$$\text{Aire}(ABC)=\frac{\sqrt{29}\times\sqrt{\frac{198}{29}}}{2}=\frac{\sqrt{198}}{2}=\frac{3\sqrt{22}}{2}$$

4. c. En exprimant à nouveau le volume du tétraèdre $ABCD$ avec la base ABC et la hauteur d représentant la distance du point D au plan (ABC) :

$$V=\frac{1}{3}\times\text{Aire}(ABC)\times d\implies 3=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{22}}{2}\times d\implies 3=\frac{\sqrt{22}}{2}d\implies d=\frac{6}{\sqrt{22}}=\frac{3\sqrt{22}}{11}$$

Exercice 4 : Fonctions et calcul intégral

1. On a $\lim_{xo+\infty}x=+\infty$ et $\lim_{xo+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim_{xo+\infty}(\ln x)^2=+\infty$. Par produit de limites, on en déduit :

$$\lim_{xo+\infty}f(x)=+\infty$$

2. a. Pour tout réel $x>0$:

$$4\big(g(\sqrt{x})\big)^2 = 4\big(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\big)^2 = 4\big(\sqrt{x} \times \tfrac{1}{2}\ln x\big)^2 = 4 \times \left(\tfrac{1}{4} \times x \times (\ln x)^2\right) = x(\ln x)^2 = f(x)$$

2. b. Par croissances comparées, on sait que $\lim_{to0^+} g(t) = \lim_{to0^+} t \ln t = 0$. Comme $\lim_{xo0^+} \sqrt{x} = 0$, on en déduit par composition que $\lim_{xo0^+} g(\sqrt{x}) = 0$. D'où :

$$\lim_{xo0^+} f(x) = 4 \times 0^2 = 0$$

3. a. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times \left(2 \times \tfrac{1}{x} \times \ln x\right) = (\ln x)^2 + 2\ln x = (\ln x)(2 + \ln x)$$

3. b. Étudions le signe des facteurs de la dérivée sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$\ln x \geq 0 \iff x \geq 1$$

$$2 + \ln x \geq 0 \iff \ln x \geq -2 \iff x \geq e^{-2}$$

Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$

3. c. Sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, le maximum de f est atteint en $x = e^{-2}$ et vaut :

$$f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = 4e^{-2}$$

4. a. D'après le tableau de variations :

Sur $]0\,;\,1]$, le maximum de f est $4e^{-2} \approx 0,54$. L'équation $f(x) = 2$ n'a donc pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante, avec $f(1) = 0$ et $\lim_{xo+\infty} f(x) = +\infty$. Comme $2 \in [0\,;\,+\infty[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection) assure l'existence d'une unique solution α sur cet intervalle.

Ainsi, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. b. À l'aide d'une calculatrice, on trouve :

$f(2,4) \approx 1,84 < 2$ et $f(2,5) \approx 2,10 > 2$. Un encadrement de α d'amplitude 0,1 est donc : $2,4 < \alpha < 2,5$.

5. a. La fonction f étant positive sur l'intervalle $[a\,;\,1]$, l'intégrale $\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = 1$.

5. b. Procédons par intégration par parties pour calculer $\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$:

Posons $u'(x) = x \implies u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = (\ln x)^2 \implies v'(x) = \frac{2\ln x}{x}$. On obtient :

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_a^1 - \int_a^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$$

En utilisant la relation $\int_1^a = -\int_a^1$, on a bien :

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \int_1^a x\ln x\,\mathrm{d}x$$

5. c. Effectuons une seconde intégration par parties pour évaluer $J = \int_1^a x\ln x\,\mathrm{d}x$:

Posons $U'(x) = x \implies U(x) = \frac{x^2}{2}$ et $V(x) = \ln x \implies V'(x) = \frac{1}{x}$:

$$J = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^a - \int_1^a \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\ln a - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^a = \frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$$

En substituant dans l'expression de la question précédente, on a bien :

$$\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

5. d. Par croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{a\to 0^+} a^2\ln a = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a\to 0^+} a^2(\ln a)^2 = \lim_{a\to 0^+}(a\ln a)^2 = 0$$

De plus, $\lim_{a\to 0^+} -\frac{a^2}{4} = 0$. Par conséquent, on obtient :

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$