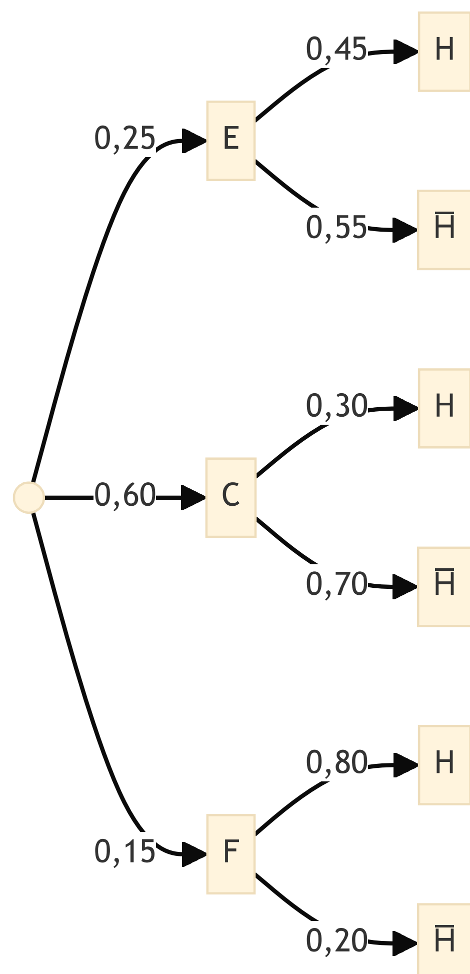
Spécialité mathématiques - Sujet 1 Amérique du Nord 2026

Exercice 1

On commence par compléter l'arbre pondéré avec les données de l'énoncé. On a $P(E) = 0,25$, $P(F) = 0,15$ et comme E, C, F forment une partition de l'univers, $P(C) = 1 - 0,25 - 0,15 = 0,60$. De plus, $P_E(H) = 0,45$, $P_C(H) = 0,30$. Enfin, $P(F \cap H) = 0,12$, ce qui permet de calculer $P_F(H) = P(F \cap H)/P(F) = 0,12/0,15 = 0,80$.

Arbre de probabilités :



2. Calcul de la valeur exacte de $P(E \cap H)$:

$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125$

3. Par la formule des probabilités totales, E, C et F formant une partition de l'univers :

$$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H) = 0,1125 + 0,60 \times 0,30 + 0,12 = 0,1125 + 0,18 + 0,12 =$$

4. On cherche la probabilité conditionnelle $P_H(E)$:

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1125}{0,4125} = \frac{3}{11} \approx 0,273$$

Partie B

1. L'expérience consiste en la répétition de 8 tirages indépendants et identiques (avec remise) de profils d'abonnés. Chaque tirage a deux issues possibles : l'abonné a activé l'option H (succès de probabilité $p = 0,4125$) ou non. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,4125$.

2. On cherche la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option H :

$$P(X = 0) = (1 - 0,4125)^8 = 0,5875^8 \approx 0,015$$

3. a. Soit un échantillon de n abonnés. L'événement "au moins un abonné a activé l'option" est l'événement contraire de "aucun abonné n'a activé l'option". Ainsi :

$$q_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,5875^n$$

b. On cherche la plus petite valeur de n telle que la probabilité soit supérieure ou égale à 0,999 (soit 99,9 %).

$$\begin{aligned} 1 - 0,5875^n \geq 0,999 &\iff 0,5875^n \leq 0,001 \\ &\iff n \ln(0,5875) \leq \ln(0,001) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \approx 12,98 \end{aligned}$$

La plus petite valeur entière de n est donc $n = 13$.

Partie C

1. Les six tarifs possibles en euros sont : 5 (Étudiant sans option), 7 (Étudiant avec option), 10 (Classique sans option), 12 (Classique avec option), 16 (Famille sans option) et 18 (Famille avec option).

2. Déterminons les probabilités correspondantes pour la loi de Y :

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	$0,1375$	$0,1125$	$0,4200$	$0,1800$	$0,0300$	$0,1200$

3. Calcul de l'espérance $E(Y)$:

$$E(Y) = 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 + 10 \times 0,4200 + 12 \times 0,1800 + 16 \times 0,0300 + 18 \times 0,1200 = 10,475$$

En moyenne, un abonné paie 10,475 euros par mois à cette plateforme.

4. À l'aide de la calculatrice, on obtient la variance de Y :

$$V(Y) \approx 13,70$$

5. a. On a $V(Z) = \sigma(Z)^2 = 2^2 = 4$.

b. L'intervalle de prix strictement compris entre 6 et 12 euros correspond à l'événement $6 < Z < 12$. Comme l'espérance est de 9 euros, cet événement s'écrit $|Z - 9| < 3$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Par conséquent, la probabilité de l'événement contraire est :
$P(|Z - 9| < 3) = 1 - P(|Z - 9| \geq 3) \geq 1 - 4/9 = 5/9 \approx 55,6$ %. Comme 55,6 % est supérieur ou égal à 50 %, l'affirmation du responsable est justifiée.

Exercice 2

1. Pour $n = 0$, on a $u_1 = 4 - 4/u_0 = 4 - 4/4 = 3$. Le modèle prévoit donc 3000 perches-soleil au 1er janvier 2026.

2. a. La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $h'(x) = 4/x^2$. Comme $h'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$, la fonction h est strictement croissante sur cet intervalle.

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$:

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_1 = 3$ et $u_0 = 4$. On a bien $2 \leq 3 \leq 4 \leq 4$, soit $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$. La propriété est initialisée au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 0$, soit $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$. Comme la fonction h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a $h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4)$. En calculant $h(2) = 2$ et $h(4) = 3 \leq 4$, on obtient $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$. La propriété est donc héritaire. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle ℓ.

d. La fonction h étant continue sur $[2; 4]$, la limite ℓ est solution de l'équation $\ell = h(\ell)$:

$\ell = 4 - \frac{4}{\ell} \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2$

e. La limite de la population est de 2 (soit 2000 individus). Ce modèle ne prévoit donc pas une élimination à long terme de l'espèce.

3. a. Le script complété est le suivant : on initialise la boucle conditionnelle par 'while u >= s :', suivie à l'intérieur de la boucle de l'instruction de calcul 'u = 4 - 4 / u' et de l'incrémentation 'n = n + 1'.

b. Par calculs successifs : $u_0 = 4$, $u_1 = 3$, $u_2 \approx 2,67$, $u_3 = 2,5$, $u_4 = 2,4$, $u_5 \approx 2,33$, $u_6 \approx 2,29$, $u_7 = 2,25$, $u_8 \approx 2,22$, $u_9 = 2,2$ et $u_{10} \approx 2,18$. La commande 'population(2.2)' renvoie donc la valeur 10. Cela signifie qu'à partir de l'année 2035 $(2025 + 10)$, le nombre de perches-soleil sera strictement inférieur à 2200.

Partie B

1. L'équation différentielle s'écrit $y' = -y + 2$. Les solutions sur $[0; +\infty[$ de cette équation sont de la forme $y(t) = Ce^{-t} + 2$, où C est une constante réelle.

2. Avec la condition initiale $p(0) = 4$, on obtient $Ce^0 + 2 = 4 \implies C = 2$. L'expression de la fonction p est donc :

$$p(t) = 2e^{-t} + 2$$

3. Comme $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 2$. Le nombre de poissons tend vers 2000 à long terme, donc ce modèle ne prévoit pas l'élimination de l'espèce.

Exercice 3

1. Les coordonnées des points A et D sont $A(-1; -1; 0)$ et $D(1; -1; 0)$.

2. Calcul du produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SC} &= C - S = (1; 1; -2) \\ \overrightarrow{SB} &= B - S = (-1; 1; -2) \\ \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} &= 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) = -1 + 1 + 4 = 4 \end{aligned}$$

3. On a $SC = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$ et de même $SB = \sqrt{6}$. Ainsi :

$$\cos(\widehat{BSC}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}}{SC \times SB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \implies \widehat{BSC} \approx 48,2°$$

Partie B

1. a. On vérifie que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) :

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc bien normal au plan (SBC).

b. Une équation cartésienne de (SBC) est de la forme $2y + z + d = 0$. En y injectant les coordonnées de $S(0; 0; 2)$, on obtient $2(0) + 2 + d = 0 \implies d = -2$. L'équation est donc bien $2y + z - 2 = 0$.

2. a. La droite (OH) passe par $O(0; 0; 0)$ et est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(0; 2; 1)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

b. Le point H est l'intersection de la droite (OH) et du plan (SBC). En remplaçant les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan, on trouve $2(2t) + t - 2 = 0 \implies 5t = 2 \implies t = 0,4$. On en déduit les coordonnées de H :

$$H\left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

c. La distance de O au plan (SBC) est égale à la longueur OH :

$$OH = \sqrt{0^2 + 0,8^2 + 0,4^2} = \sqrt{0,64 + 0,16} = \sqrt{0,8} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

Partie C

1. a. Le volume de la pyramide à base carrée $SABCD$ de côté 2 et de hauteur $OS = 2$ est :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABCD) \times OS = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \frac{8}{3} \text{ cm}^3$$

b. Le triangle OBC a pour base $BC = 2$ et pour hauteur relative 1. Son aire est de 1 cm^2. La hauteur de la pyramide $OCBS$ associée à cette base est $OS = 2$. Son volume est donc :

$$V(OCBS) = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

2. Soit $J(0; 1; 0)$ le milieu de $[BC]$. Dans le triangle isocèle SBC, la hauteur issue de S est $SJ = \sqrt{5}$. L'aire du triangle SBC est :

$$\text{Aire}(SBC) = \frac{BC \times SJ}{2} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ cm}^2$$

3. En exprimant le volume de $OCBS$ par rapport à sa base SBC, on a :

$V(OCBS) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(SBC) \times d(O, (SBC)) \iff \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times d(O, (SBC)) \iff d(O, (SBC)) =$

Exercice 4

1. Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ semble convexe sur $[-1; 1]$ et concave sur $]-u; -1]$ ainsi que sur $[1; +\infty[$.

2. En $-\infty$: $\lim_{x \to -\infty}(x^2+1) = +\infty$, donc $\lim_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \to -\infty} -3x = +\infty$. Par somme de limites, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

3. a. Pour tout $x > 0$:

$$f(x) = 5\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x = 10\ln(x) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 3x = x\left(10\frac{\ln(x)}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b. Par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty}\left(10\frac{\ln(x)}{x} - 3\right) = -3$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$. On en déduit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

4. a. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2+1} - 3 = \frac{10x-3x^2-3}{x^2+1} = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$$

b. Le dénominateur x^2+1 est strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $-3x^2+10x-3$. Ce polynôme du second degré a pour racines $x_1 = 1/3$ et $x_2 = 3$. Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$1/3$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1/3)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

5. a. Le signe de $f''(x)$ est celui de $10(1-x^2)$. Ce polynôme est positif sur $[-1; 1]$ et négatif sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$. Ainsi, la fonction f est bien convexe sur $[-1; 1]$ et concave sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$. Cela valide la conjecture de la question 1.

b. L'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$ est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. On a $f(1) = 5\ln(2) - 3$ et $f'(1) = 2$. On obtient :

$$y = 2(x-1) + 5\ln(2) - 3 \iff y = 2x + 5\ln(2) - 5$$

c. Comme la fonction f est concave sur $[1; +\infty[$, sa courbe représentative est située sous sa tangente en $x = 1$:

$$
\begin{aligned}
5\ln(x^2+1) - 3x &\leq 2x + 5\ln(2) - 5 \\
5\ln(x^2+1) &\leq 5x + 5\ln(2) - 5 \\
\ln(x^2+1) &\leq x + \ln(2) - 1
\end{aligned}
$$